This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

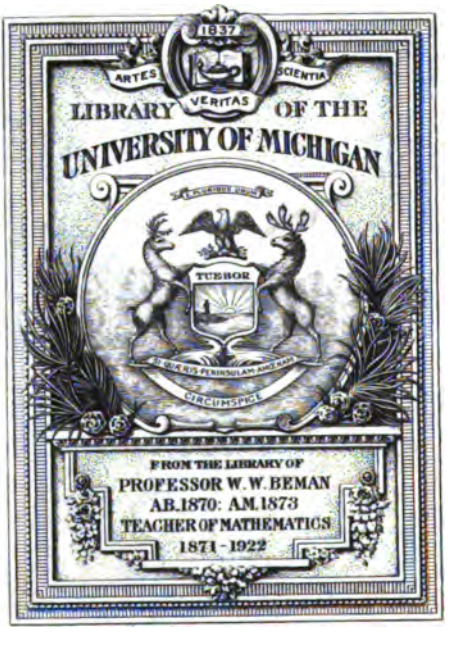
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
A.B. 1870: A.M. 1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871 - 1922

MATHEMATICS
QA
157
M452q

QUESTIONS D'ALGÈBRE

QUESTIONS D'ALGÈBRE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
ET DES CANDIDATS AUX ÉCOLES
POLYTECHNIQUE, NORMALE, CENTRALE, etc.

PAR

GEORGES MAUPIN

LICENCIÉ ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES
MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Avec une Préface

DE

M. C.-A. LAISANT

DOCTEUR ÈS SCIENCES

« Plus les Calculs sont composez, plus il est nécessaire de ne se borner point à les lire. Il faut avoir sans cesse la plume à la main, et exécuter soi-même ce qu'on lit. On doit même réitérer les Opérations, et se rendre très familière une partie du Calcul avant que de passer à une suivante. Il semble d'abord que ces précautions retardent ; mais, dans le fond, elles abrègent, et il n'y a qu'à les négliger pour se trouver bientôt convaincu qu'on a perdu son temps, et pour se trouver dans la nécessité de recommencer. »

(DE CROUZAS, *Traité de l'Algèbre*, M.DCC.XXVI, page 392).

PARIS

LIBRAIRIE NONY & Cie

17, RUE DES ÉCOLES, 17

1895

(Tous droits réservés)

Mrs. Beman
8627
Math.
6-16-1923

PRÉFACE

Lorsque M. Georges Maupin me fit l'honneur de me demander d'écrire une Préface pour le livre qu'il présente aujourd'hui au public, je ne pus me défendre d'une certaine crainte et d'un peu d'hésitation. Il est toujours délicat d'apprécier les œuvres d'autrui, lorsque c'est pour les louer ; on se demande, d'une part, si l'on en dira tout le bien qu'elles méritent ; et, d'un autre côté, si les éloges ne sembleront pas dictés uniquement par la sympathie personnelle qu'inspire l'auteur.

Cependant, à la lecture du manuscrit, je sentis bientôt mes hésitations vaincues, en m'apercevant des services très réels qu'un modeste recueil comme celui-ci pouvait rendre à l'enseignement.

Rien n'est plus banal en apparence qu'une collection de problèmes destinés à des élèves, et répondant à un programme déterminé. Rien n'est plus utile cependant; et l'on doit reconnaître que les élèves de mathématiques spéciales n'ont pas beaucoup d'ouvrages de cette nature à leur disposition, en ce qui concerne l'enseignement de l'Algèbre.

Il est vrai de dire que M. Maupin lui-même a publié antérieurement un petit recueil d'Exercices d'Algèbre. Mais le nombre des questions et le plan général de l'œuvre différencient tellement les deux livres, que celui-ci ne saurait en rien être considéré comme une édition nouvelle du précédent, malgré les emprunts forts légitimes qui y ont été faits.

Du reste, chaque année, les examens d'admission à l'École

427425

Polytechnique ou à l'École Normale révèlent des questions nouvelles, qui contribuent sans cesse aux progrès de l'enseignement, et c'est plus vrai peut-être pour l'Algèbre que pour les autres parties du programme. De là résulte qu'un ouvrage excellent, au moment de sa publication, peut très bien, au bout de quelques années, ne pas rendre les mêmes services qu'au début.

Il y a deux manières de se préparer aux examens et aux concours. Le premier consiste à se confiner étroitement dans les limites du programme, à s'enquérir des questions particulières pour lesquelles les examinateurs manifestent, à ce que l'on croit, quelque prédilection ; l'autre méthode s'inspire de préoccupations très différentes : on cherche à *s'instruire*, plutôt qu'à *se préparer*, et il se trouve qu'on est préparé précisément parce que l'on s'est instruit.

Il suffit de feuilleter les *Questions d'Algèbre* de M. Maupin, pour reconnaître qu'il est de cette dernière école ; et c'est précisément le secret de l'originalité et de l'intérêt que présente son volume.

Il n'a pas craint de faire discrètement quelques excursions dans des régions extérieures aux frontières des programmes actuels. Quelques-unes des matières traitées par lui étaient exigées hier; quelques autres le seront peut-être demain.

Un consciencieux élève de Mathématiques Spéciales ne s'attachera pas évidemment à l'étude de ces branches de l'Algèbre avec la même âpreté qu'il apporte aux chapitres sur lesquels on peut l'interroger directement. Mais il aurait grand tort de s'imaginer que ces *promenades analytiques* à l'extérieur lui seront inutiles. C'est en ne dédaignant pas de donner un coup d'œil à ces questions « d'à-côté » qu'on acquiert des idées générales ; et ce sont les idées générales qui permettent seules de comprendre les théories algébriques, de se les assimiler entièrement, et qui par cela même soulagent l'effort de la mémoire et sont ainsi un précieux moyen de préparation indirecte.

Parmi les théories étrangères aux programmes actuels, sur lesquelles l'auteur a présenté un assez bon nombre d'intéressantes questions, il y a lieu de citer le calcul des probabilités, qui se

prête à des applications utiles de l'analyse combinatoire, les développements en produits infinis, le théorème de Sturm, les fractions continues, et quelques applications géométriques du calcul infinitésimal.

Tout cela néanmoins tient une place relativement restreinte. La partie essentielle se rapporte aux questions rentrant dans le programme d'algèbre, ainsi que le montrera la lecture de la Table des matières. Je n'ai pas à y insister ici, d'autant plus que je ne saurais dispenser l'auteur des explications de détail, et pour ainsi dire pratiques, qu'il est à même de donner beaucoup mieux que moi sur la composition de son ouvrage.

Mais ce que je dois louer sans réserve, c'est l'heureux choix des questions traitées, l'abondance des renseignements historiques fournis sur certains points de la science, et la conscience apportée par M. Maupin à la composition de son œuvre. De tout cela résulte que pour le simple lecteur curieux des choses de l'Algèbre, ce livre sera intéressant à étudier, en même temps qu'il deviendra, pour les candidats un manuel des plus utiles. Ceux d'entre eux qui auront travaillé avec un peu de soin et d'attention les 125 questions complètement traitées, et qui se seront exercés sur quelques-uns des problèmes proposés, dont le nombre dépasse 1300, auront certainement acquis une grande force de plus pour affronter les épreuves des concours. Je me hâte d'ajouter que, même pour ces exercices proposés, la tâche sera facilitée par de rapides indications dont l'auteur s'est avec raison montré prodigue.

Suivant un mot célèbre, et profondément juste (1), « il n'y a pas de routes royales en Géométrie », — le mot *Géométrie* signifiant ici la *Science Mathématique* dans son ensemble.

Mais s'il n'y a pas de routes royales, si rien ne dispense du travail personnel et de l'effort cérébral, il est permis de tracer des sentiers nouveaux, en évitant des sinuosités inutiles, en ménageant çà et là quelques vues sur les horizons plus lointains. C'est ce qu'a tenté de faire M. Maupin ; et il s'est permis d'y ajouter

---

(1) Parole attribuée par Proclus (412-485) à Euclide s'adressant au roi Ptolémée.

parfois un modeste ornement, pour rendre le chemin plus agréable. A tous ces titres, il mérite la reconnaissance des élèves de Mathématiques spéciales — et aussi des professeurs. A tous il sera utile; et pour ceux qui voient au-delà des examens, je ne crois pas me tromper en affirmant que ce volume sera conservé soigneusement par eux et plus d'une fois consulté dans l'avenir, bien des années après qu'ils auront terminé leurs études et se trouveront définitivement délivrés du cauchemar des concours.

C.-A. LAISANT.

AVERTISSEMENT DE L'AUTEUR

Chargé depuis trois ans d'interrogations dans la classe de Mathématiques Spéciales au Lycée de Nantes, j'ai été conduit à rassembler des exercices relatifs à ce cours, et dans ce but j'ai puisé à deux sources principales.

En premier lieu, j'ai reproduit les principales questions, les plus récentes surtout, posées aux examens d'admission aux Écoles Polytechnique, Centrale et Navale, soit d'après les renseignements qui m'ont été fournis par les candidats, soit d'après ce qui en a paru dans la *Revue de Mathématiques Spéciales*, l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, *Mathesis*, les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

En second lieu, j'ai pris dans les ouvrages originaux les problèmes qui me paraissent pouvoir être faits par des élèves, espérant ajouter à leur intérêt propre celui qui résulte de la célébrité de leurs auteurs. L'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler, l'*Ars conjectandi* de Jacques Bernoulli, l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla, le *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Joseph Bertrand, etc., m'ont donné un grand nombre d'énoncés, et j'ai cru même devoir en faire des extraits assez étendus.

L'ouvrage de Montucla [1] est particulièrement curieux et intéressant. Ce savant rappelle l'admiration que Xénocrate, Socrate,

(1) *Histoire des Mathématiques*, par Jean-Etienne Montucla, Paris, 1758, 2 vol. in-4°. — Le même ouvrage, achevé par Jérôme De La Lande, Paris, an VII-1808, 4 vol. in-4°. — Tous les passages cités seront empruntés à cette seconde édition.

Hippocrate, Cicéron, avaient pour les mathématiques. Il cite le rescrit de Dioclétien et de Maximien : « artem geometriæ discere atque exerceri publicè interest », et les titres de « *Spectabiles* » et de « *Clarissimi* » assignés par Théodose et Valentinien aux géomètres. Il s'écrie lui-même avec enthousiasme : « depuis un petit nombre d'années il n'est presque aucune université, aucun collège où les mathématiques n'aient pénétré ; aussi, semblables à la clarté de l'aurore naissante, qui dissipe les prestiges de la nuit, ont-elles banni de ces lieux d'institution publique les opinions erronées de la philosophie ancienne, et jusqu'au misérable ergotage de la logique et de la théologie ».

Un certain nombre d'exercices, quoique sortant du programme d'admission aux Écoles, peuvent être traités avec les seules ressources qu'offre le cours de Mathématiques Spéciales. J'ai eu soin de donner le résultat ou la marche à suivre, toutes les fois que cela m'a paru nécessaire. De plus les sources originales ont été indiquées toutes les fois que j'ai pu les trouver moi-même, avec plus de détails pour les problèmes difficiles ou curieux.

J'ai tenu à insister plus particulièrement sur la discussion des fonctions et à donner un certain nombre d'exemples. Je n'aurais pu atteindre ce but sans l'aide d'un collaborateur distingué, M. Louis Messent, rédacteur au *Journal de Mathématiques Élémentaires*. Non seulement, en effet, M. Messent a construit avec une perfection remarquable les courbes représentatives de la marche de ces fonctions, mais encore, et par suite même du soin qu'il a apporté à leur tracé, il a pu faire à leur sujet différentes remarques qui m'ont été fort utiles et dont je lui suis très reconnaissant. Chaque courbe (sauf la courbe $y = x\,\mathrm{L}x$) a été obtenue graphiquement point par point, à l'aide d'une construction géométrique appropriée, s'appliquant à un point quelconque et déduite de l'équation de la courbe. Pour quelques équations qui entraînent l'extraction d'une racine autre que la racine carrée, on s'est servi d'une courbe auxiliaire : par exemple la courbe $y^5 + x^5 = 1$ a été construite en traçant d'abord la courbe $y_1 = x^5$.

Je dois enfin adresser mes plus sincères remercîments à M. C.-A. Laisant, qui avec une inépuisable complaisance m'a adressé des renseignements de toute nature et dont on trouvera souvent le

nom dans le courant de cet ouvrage ; à M. Paul Humbert, Professeur au Lycée de Sens, dont les conseils m'ont été précieux pour le choix des exercices ; à M. Jules Favro, Répétiteur au Lycée de Nantes, qui a bien voulu m'aider dans la correction des épreuves.

Nantes, le 23 novembre 1894.

G. MAUPIN.

QUESTIONS D'ALGÈBRE

CHAPITRE I

DIVISION ALGÉBRIQUE. — VÉRIFICATION DES FORMULES
ANALYSE COMBINATOIRE
IMAGINAIRES. — LOGARITHMES

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — *Vérifier la formule*

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^n - n\left(x + \frac{1}{x}\right)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{n-4}$$
$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{n-6} + \cdots$$
$$+ (-1)^p \frac{n(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+1)}{p\,!}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{n-2p} \cdots$$

Si l'on fait dans la formule :

$n = 1$, on a $x + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$;

$n = 2$, on a $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$;

$n = 3$, on a $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

La formule est donc vraie pour les valeurs 1, 2, 3 attribuées à n. Je la suppose vérifiée par 1, 2, 3, ..., $(n-1)$, n, et je dis qu'elle l'est encore par $n+1$.

Pour le prouver, je m'appuierai sur la formule

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

Le terme général de la formule proposée s'écrit

$$(-1)^p \frac{n}{n-p} C_{n-p,p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2p}.$$

On a

$$(1)\quad \begin{cases} x^n+\dfrac{1}{x^n} = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n - n\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{n-2} + \dfrac{n(n-3)}{1.2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{n-4} \\ \qquad + \cdots + (-1)^p \dfrac{n}{n-p} C_{n-p,p}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{n-2p} \pm \cdots \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} x^{n-1}+\dfrac{1}{x^{n-1}} = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{n-1} - \cdots \\ \qquad + (-1)^p \dfrac{n-1}{n-p-1} C_{n-p-1,p}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{n-2p-1} \pm \cdots \end{cases}$$

Si la formule est vraie pour $n+1$, on aura

$$(3)\quad \begin{cases} x^{n+1}+\dfrac{1}{x^{n+1}} = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{n+1} - \cdots \\ \qquad + (-1)^p \dfrac{n+1}{n-p+1} C_{n-p+1,p}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{n-2p+1} \pm \cdots \end{cases}$$

D'après la remarque faite précédemment, je vais multiplier (1) par $x+\dfrac{1}{x}$, en retrancher (2), et je devrai ainsi obtenir (3).

Multiplié par $x+\dfrac{1}{x}$, le premier terme de (1) donne le premier terme de (3). Le deuxième terme de (1) multiplié par $x+\dfrac{1}{x}$ et diminué ensuite du premier terme de (2) donne

$$-n\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-1} - \left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-1} = -(n+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-1},$$

c'est-à-dire le deuxième terme de (3), et ainsi de suite.

En général, le terme de rang $p+1$ de (1), multiplié par $x+\dfrac{1}{x}$ et duquel on retranchera le $p^{ième}$ terme de (2), devra donner le $(p+1)^{ième}$ terme de (3). Il faut donc que

$$\begin{aligned} (-1)^p \frac{n}{n-p} C_{n-p,p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2p}\left(x+\frac{1}{x}\right) & \\ - (-1)^{p-1} \frac{n-1}{n-p} C_{n-p,p-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2p+1} & \\ = (-1)^p \frac{n+1}{n-p+1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2p+1} C_{n-p+1,p}, & \end{aligned}$$

ou que

$$(-1)^p \frac{n}{n-p} C_{n-p,p} - (-1)^{p-1} \frac{n-1}{n-p} C_{n-p,p-1} = (-1)^p \frac{n+1}{n-p+1} C_{n-p+1,p}.$$

Le premier membre s'écrit

$$\frac{(-1)^p}{(p-1)!}(n-p-1)\ldots(n-2p+2)\left[\frac{n(n-2p+1)}{p!}+n-1\right]$$
$$=(-1)^p(n+1)\frac{(n-p)(n-p-1)\ldots(n-2p+2)}{p!};$$

c'est bien l'expression

$$(-1)^p\frac{n+1}{n-p+1}C_{n-p+1,p}.$$

Ainsi, la formule, supposée vraie jusqu'à n, l'est encore pour $n+1$, c'est-à-dire qu'elle est générale.

Question II. — *On désigne par* $\overset{n}{[m]}$ *le produit*

$$m(m-1)\ldots(m-n+1).$$

On demande de vérifier la formule suivante, connue sous le nom de binome factoriel de Vandermonde :

$$\overset{m}{[(a+b)]}=\overset{m}{[a]}+m\overset{m-1}{[a]}\,b+\frac{m(m-1)}{1.2}\overset{m-2}{[a]}\,\overset{2}{[b]}+\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\overset{m-n}{[a]}\,\overset{n}{[b]}+\cdots+\overset{n}{[b]}.$$

Je regarderai $\overset{0}{[m]}$ comme égal à 1, et prouvant d'abord que la formule est vraie pour les valeurs 0, 1, 2 de m, je démontrerai qu'étant vérifiée pour $m=p$, elle l'est encore pour $m=p+1$.

Pour $m=0$, $\overset{0}{[(a+b)]}=\overset{0}{[a]}$ ou $1=1$.

Pour $m=1$, $\overset{1}{[(a+b)]}=\overset{1}{[a]}+\overset{0}{[a]}\,b$.

Pour $m=2$, $\overset{2}{[(a+b)]}=\overset{2}{[a]}+2\overset{1}{[a]}\,b+\frac{2.1}{1.2}\overset{0}{[a]}\,\overset{2}{[b]}$.

Il faut maintenant vérifier que la formule, vraie pour p, l'est aussi pour $p+1$. Ainsi on suppose

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}\overset{p}{[(a+b)]}&=\overset{p}{[a]}+p\overset{p-1}{[a]}\,b+\cdots\\&+\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}\overset{p-n}{[a]}\,\overset{n}{[b]}+\cdots+\overset{n}{[b]}.\end{aligned}\right.$$

Il faut démontrer que

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}\overset{p+1}{[(a+b)]}&=\overset{p+1}{[a]}+(p+1)\overset{p}{[a]}\,b+\cdots\\&+\frac{(p+1)p\ldots(p-n+2)}{n!}\overset{p+1-n}{[a]}\,\overset{n}{[b]}+\cdots+\overset{n}{[b]}.\end{aligned}\right.$$

On passe du premier membre de (1) au premier membre de (2) en

multipliant les deux membres de (1) par $a+b-p$. Il suffit de prouver que cette opération rend identiques les deux seconds membres. Il est en effet évident que pour multiplier (1) par $a+b-p$, on peut procéder comme il suit :

On multiplie le premier terme de (1) par $(a-p)$,
puis le premier terme par b, et le deuxième par $(a-p+1)$,
puis le deuxième terme par $b-1$, et le troisième par $(a-p+2)$,
puis le troisième terme par $b-2$, et le quatrième par $(a-p+3)$,

. . . . . .

en général le $n^{ième}$ terme par $(b-n+1)$, et le $(n+1)^{ième}$ par $(a-p+n)$,

. . . . . .

et on fait la somme de tous ces produits.

Cela posé, la première opération donne le premier terme de (2) :

$$\overset{p}{[a]}(a-p) = \overset{p+1}{[a]};$$

la deuxième donne le deuxième terme de (2) :

$$\overset{p}{[a]}b + p\overset{p-1}{[a]}b(a-p+1) = (p+1)\overset{p}{[a]}b;$$

. . . . . .

la $(n+1)^{ième}$ opération donnera le $(n+1)^{ième}$ terme de (2), c'est-à-dire que l'on aura

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-n+2)}{(n-1)!}\overset{p-n+1}{[a]}\overset{n-1}{[b]}(b-n+1)$$
$$+\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}\overset{p-n}{[a]}\overset{n}{[b]}(a-p+n)$$
$$=\frac{(p+1)p(p-1)\ldots(p-n+2)}{n!}\overset{p-n+1}{[a]}\overset{n}{[b]},$$

ou

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-n+2)}{(n-1)!}\overset{p-n+1}{[a]}\overset{n}{[b]}\left(1+\frac{p-n+1}{n}\right)$$
$$=\frac{(p+1)p\ldots(p-n+2)}{n!}\overset{p-n+1}{[a]}\overset{n}{[b]},$$

ce qui est facile à vérifier.

Donc la formule est vraie pour $m=p+1$: elle est donc vraie d'une manière générale.

Question III. — *Développer, par rapport aux puissances de* α, *l'expression*

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

On a $$1 - 2\alpha x + \alpha^2 = 1 - \alpha(2x - \alpha);$$
développant alors par la formule du binome, il vient

$$1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{1}\alpha(2x-\alpha) + \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\alpha^2(2x-\alpha)^2 + \cdots \\ \qquad + \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}{n!}\alpha^n(2x-\alpha)^n + \cdots \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1 + \dfrac{\alpha}{1}\left(x - \dfrac{\alpha}{2}\right) + \dfrac{1.3}{1.2}\alpha^2\left(x - \dfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \cdots \\ \qquad + \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}\alpha^n\left(x - \dfrac{\alpha}{2}\right)^n + \cdots \end{array} \right.$$

Ordonnant par rapport aux puissances de α,

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \alpha x + \left(\dfrac{1.3}{1.2}x^2 - \dfrac{1}{2}\right)\alpha^2 + \left(\dfrac{1.3.5}{3!}x^3 - \dfrac{1.3x}{1\ 2}\right)\alpha^3 + \cdots \\ + \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1.3\ldots(2n-1)}{n!}x^n - \dfrac{1.3\ldots(2n-3)}{(n-2)!}\dfrac{1}{1}\dfrac{x^{n-2}}{2} + \cdots \\ \qquad + (-1)^p\dfrac{1.3\ldots(2n-2p-1)}{(n-2p)!}\dfrac{1}{p!}\dfrac{x^{n-2p}}{2^p} + \cdots \end{array} \right\}\alpha^p + \cdots \end{array} \right.$$

(On a formé le terme général de ce développement en prenant dans le terme de rang $(n+1)$ le coefficient $\dfrac{1.3\ldots(2n-1)}{n!}$ et le multipliant par x^n, puis dans le terme de rang n, le coefficient $\dfrac{1.3\ldots(2n-3)}{(n-1)!}$ et le multipliant par $-\dfrac{n}{1}x^{n-2}$, et ainsi de suite.)

Soit P_n le terme général de (1). On a évidemment

$$P_n.2.4.6\ldots 2n = \frac{1.2.3\ldots 2n}{n!}x^n - \frac{1.2.3\ldots(2n-2)}{(n-2)!}\frac{2n}{1}\frac{x^{n-2}}{2} + \cdots$$
$$+ (-1)^p\frac{1.2.3\ldots(2n-2p)}{n-2p}\frac{2n(2n-2)\ldots(2n-2p+2)}{p!}\frac{x^{n-2p}}{2^p} + \cdots$$
$$= 2n(2n-1)\ldots(n+1)x^n - \frac{n}{1}(2n-2)(2n-1)x^{n-2} + \cdots$$
$$+ (-1)^p(2n-2p)\ldots(n-2p+1)\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}x^{n-2p} + \cdots$$

Remarque. — Si on désigne par $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les fonctions de Legendre, définies par la relation

$$X_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n],$$

on peut écrire

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \alpha X_1 + \alpha^2 X_2 + \cdots + \alpha^n X_n + \cdots$$

Question IV. — *Triangle arithmétique de* PASCAL.

Nous figurons un triangle arithmétique

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
			1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
				1	5	15	35	70	126	210	330	495
					1	6	21	56	126	252	462	792
						1	7	28	84	210	462	924
							1	8	36	120	330	792
								1	9	45	165	495
									1	10	55	220
										1	11	66
											1	12
												1

Pour faire concevoir sa formation, il nous suffira de dire que, la première ligne et la diagonale étant remplies par des 1, le terme situé dans la colonne (verticale) de rang m et la ligne (horizontale) de rang p s'obtient en faisant la somme des deux termes situés, respectivement, dans la colonne $m-1$ et la ligne $p-1$, dans la colonne $m-1$ et la ligne p.

Le nombre des combinaisons $C_{m,p}$ de m lettres p à p s'obtient immédiatement par ce tableau : c'est celui qui se trouve dans la colonne de rang $m+1$ et la ligne de rang $p+1$.

La deuxième ligne renferme les nombres naturels.

La troisième contient les nombres dits triangulaires : l'expression du $q^{ième}$ nombre triangulaire est

$$\frac{q(q+1)}{2}.$$

La quatrième contient les nombres dits pyramidaux : le $q^{ième}$ est

$$\frac{q(q+1)(q+2)}{3!}.$$

La cinquième renferme les nombres dits triangulopyramidaux ou pentagones : le $q^{ième}$ est

$$\frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!}.$$

Et ainsi de suite.

Question V. — *Problème d'*ADRIANUS ROMANUS. (*Revue de Math. Spéciales*, août 1894.)

Soit un cercle de diamètre $AB = 2$. Prenons à partir de B des arcs égaux BM_1, M_1M_2, M_2M_3,... En désignant AM_1 par x, nous avons :

$$\begin{aligned}
AM_1 &= x,\\
AM_2 &= x^2 - 2,\\
AM_3 &= x^3 - 3x,\\
AM_4 &= x^4 - 4x^2 + 2,\\
AM_5 &= x^5 - 5x^3 + 5x,\\
AM_6 &= x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2,\\
AM_7 &= x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Or Adrianus Romanus avait proposé aux géomètres de son temps la singulière question suivante : [1]

Résoudre l'équation

$$\begin{aligned}
&x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12.300x^{39} + 111.150x^{37} - 740.259x^{35}\\
&+ 3.764.565x^{33} - 14.945.041x^{31} + 46.955.700x^{29}\\
&- 117.679.100x^{27} + 236.030.652x^{25} - 378.658.800x^{23}\\
&+ 483.841.800x^{21} - 488.494.125x^{19} + 384.942.375x^{17}\\
&- 232.676.280x^{15} + 105.306.075x^{13} - 34.512.075x^{11}\\
&+ 7.811.375x^9 - 1.138.500x^7 + 95.634x^5 - 3.795x^3 + 45x = a.
\end{aligned}$$

Cette question n'offre pas pour nous de difficultés : le premier membre de l'équation de Romanus est la longueur AM_{45}, et nous sommes ramenés à un problème sur la multisection de l'angle. Remarquant d'ailleurs que si nous désignons l'angle M_1AB par α, nous avons

$$\begin{aligned}
AM_1 &= 2\cos\alpha,\\
AM_2 &= 2\cos 2\alpha,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\\
AM_{45} &= 2\cos 45\alpha,
\end{aligned}$$

nous sommes conduits à chercher $\cos\alpha$ connaissant $\cos 45\alpha$. Nous n'insistons pas davantage sur cette question très connue de trigonométrie.

---

(1) J.-E. MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques*, tome I, pages 607-610, édition de l'an VII ; FRANCISCI VIETÆ *Opera mathematica*, pages 305-324, 1646 ; *Œuvres de* FERMAT, publiées par MM. Paul Tannery et Charles Henry, tome I.

Viète, avec cette puissance de divination qui le caractérisait, découvrit la loi des coefficients de l'équation de Romanus : « ut legi, ut solvi [1] », s'écrie-t-il. Il étudia même l'équation beaucoup plus complètement que ne l'avait fait Romanus, lequel lui attribuait seulement une racine positive.

Le tableau qui figure à la fin du livre permettra de former l'équation de Romanus et toutes celles du même genre, de degré inférieur. C'est un triangle arithmétique dont les lignes commencent par 2. Soit $T_{m,p}$ le terme occupant dans un triangle de Pascal la colonne de rang m et la ligne de rang p ; il est égal au nombre de combinaisons de $m-1$ objets $p-1$ à $p-1$:

$$T_{m,p} = C_{m-1,p-1}.$$

Si $\theta_{m,p}$ désigne le terme correspondant de notre triangle actuel, il est aisé de voir que

$$\theta_{m,p} = T_{m,p} + T_{m-1,p-1},$$

d'où

$$\theta_{m,p} = \frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-p+1)}{(p-1)!}(m+p-2).$$

Question VI. — *Application singulière des combinaisons faites par le jésuite* Bauhus [2].

« Cela nous conduit à dire quelques mots sur le vers fameux de « Bauhus, monument singulier de la piété de ce jésuite flamand envers « la Sainte Vierge :

« Tot tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera cœlo ».

« On y remarque bien facilement qu'en conservant la mesure, on

(1) Voici le bizarre et assez obscur passage de Viète par lequel débute sa longue étude de cette question : « Francisci Vietæ ad Problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, Responsum ».

« Si toto terrarum orbe non errat Adrianus Romanus, dum Mathematicos totius terrarum orbis unius sui Problematis solutione vix censet idoneos, non ille saltem Gallias, nec Galliarum Lycia suo dimensus est radio. Cedat Romano Belga, cedat Romanus Belgæ, vix sinet Gallus à Romano vel Belga gloriam suam sibi præripi. Ego qui me Mathematicum non profiteor, sed quem, si quando vacat, delectant Mathematices studia, Problema Adrianicum ut legi ut solvi, nec me malus abstulit error. Sic trihorio ingens prodii Geometra. Neque vero placet barbarum idioma, id est, Algebricum. Geometrica Geometrice tracto, Analytica Analytice. Curabo tamen ut me, sive quasi Geometram sive novum Analystam, vulgus Algebristarum satis exaudiat. »

(Francisci Vietæ *Opera mathematica*, p. 305.)

Viète vivait de 1540 à 1603, Romanus est mort en 1625.

(2) Cette question est traitée d'une façon extrêmement curieuse dans l'*Ars conjectandi*, ouvrage posthume de Jacques Bernoulli, paru en 1713, p. 77-81. Sa longueur nous empêche malheureusement de la reproduire. En citant ce vers, Bernoulli s'exprime ainsi : « Quemadmodum cernere est in hexametro à Bernh. Bauhusio Jesuità Lovaniensi in laudem Virginis Deiparæ constructo : Tot tibi... »

Le *Musée des Familles* de juin 1894 donne sur le même sujet d'intéressants détails.

« peut le faire varier de bien des manières. Le P. Bauhus ou Erycius « Puteanus en trouvoit facilement 1022, nombre des étoiles du cata- « logue de Ptolémée ; mais le véritable est bien plus considérable. « Wallis, dans la première édition de son *Traité d'Algèbre*, en trouve « d'abord 2580, que dans la seconde édition de ce traité, il porta « à 3096. Le P. Prestet est celui qui, dans la seconde édition de ses « *Élémens de mathématiques*, a approché le plus de la vérité, car il « annonce 3296 variations. Enfin Jacques Bernoulli, par une analyse « particulière, a fait voir que ce nombre n'est ni plus grand, ni moin- « dre de 3312, sans y admettre même les vers spondaïques, sauf néan- « moins les mauvais vers, comme ceux sans césure ou manquant de « sens ». (MONTUCLA, t. III, p. 388.)

Question VII. — *La fonction aleph de* WRONSKI.

Wronski appelait fonction aleph [1] et nous représentons avec M. d'Ocagne par

$$[n_1 n_2 \ldots n_\omega]^{(m)}$$

le développement de $(n_1 + n_2 + \cdots + n_\omega)^m$, où nous avons remplacé les coefficients $\frac{m}{1}$, $\frac{m(m-1)}{1.2}$, ... par l'unité.

D'après la définition même,

$$[n_1 n_2]^{(2)} = n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2,$$

$$[n_1 n_2]^{(3)} = n_1^3 + n_1^2 n_2 + n_1 n_2^2 + n_2^3,$$

. . . . . .

$$[n_1 n_2 n_3]^{(3)} = n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + n_1^2 n_2 + n_1^2 n_3 + n_2^2 n_1 + n_2^2 n_3 + n_3^2 n_1 + n_3^2 n_2 + n_1 n_2 n_3.$$

Nous indiquons aux Questions proposées (64) quelques formules relatives à cette fonction.

(WRONSKI, *Philosophie de la technie* ; MONTFERRIER, *Dictionnaire des mathématiques*, (1836), tome II, p. 257 ; D'OCAGNE, *Nouvelles Annales*, mai 1883, et juin 1886 ; CESARO, *Nouvelles Annales*, décembre 1884.)

---

(1) Wronski écrivait $[n_1 + n_2 + \cdots + n_\omega]^m$ ou $[N_\omega]^m$, en plaçant devant le crochet la lettre hébraïque *aleph*.

Il appelait aussi somme combinatoire et représentait par

$$[\Delta^a X_1 . \Delta^b X_2 . \Delta^c X_3 \ldots \Delta^p X_\omega]$$

précédé de la lettre *schin* la somme des produits des différences de ces fonctions composé ainsi qu'il suit. Ayant formé avec les exposants $a, b, c, \ldots, p$ des différences toutes les permutations possibles, on donne ces exposants, dans chaque ordre de leurs permutations, aux différences consécutives qui composent le produit

$$\Delta X_1 . \Delta X_2 . \Delta X_3 \ldots \Delta X_\omega,$$

en donnant de plus aux produits séparés formés de cette manière le signe positif lorsque le nombre des variations des exposants $a, b, c, \ldots$ considérés dans leur ordre alphabétique, est nul ou pair, et le signe négatif quand ce nombre de variations est impair. Enfin on prend la somme de tous ces produits séparés. (MONTFERRIER.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1. Diviser $a^5+(b+c)^5$ par $a+b+c$.

2. Peut-on disposer de λ de manière que $2x^3-4x^2+7x+\lambda$ soit divisible par x^2-5x+7?

3. L'expression

$$x^{2n}-n^2x^{n+1}+2(n^2-1)x^n-n^2x^{n-1}+1$$

est-elle divisible par $x-1$, et combien de fois?

4. Trouver le reste de la division du polynome entier en x

$$x^m \sin\varphi - r^{m-1}x \sin m\varphi + r^m \sin(m-1)\varphi$$

par

$$x^2-2rx\cos\varphi+r^2.$$

5. On obtient un carré parfait en ajoutant l'unité :

à 8 fois un nombre triangulaire,
ou à 24 fois un nombre pentagone,
ou à 8 fois un nombre hexagone.

(Propriétés citées par Ozanam, *Dictionnaire mathématique*, 1691.)

6. Développer en séries infinies les expressions suivantes, étudiées par Newton (*Arithmetica universalis*, 1732) :

$$\frac{a^2}{b+x};$$

$$\sqrt{a^2+x^2};$$

$$\sqrt{a^2-x^2};$$

$$\sqrt{x-x^2};$$

$$\sqrt[3]{1-x^2}.$$

7. Élever au carré les suites

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\cdots;$$

$$1+x+x^2+x^3+\cdots;$$

$$1-(-x+x^3-x^5+x^7\ldots).$$

8. Élever au cube la suite

$$1-(x-x^3+x^5-x^7+\cdots).$$

Dans les quatre questions précédentes, on suppose que les termes des séries aillent en décroissant en valeur absolue.

9. Développer en série l'expression

$$\sqrt{m^2 \pm n},$$

où m et n sont entiers. Trouver une limite supérieure de l'erreur commise quand on prend p termes du développement. Application à $\sqrt{150}$ et $\sqrt{1289}$. (*Encyclopédie.*)

10. Développer $\sqrt[3]{m^3 + n}$ en série, m et n étant entiers. (*Encyclopédie.*)

11. Développer $\dfrac{1}{a+b}$ en suite infinie, en prenant successivement a ou b comme premiers termes du diviseur. Les suites obtenues sont-elles convergentes ?

12. Exprimer que

$$\alpha(x^3 + x) + \beta(x^3 - 1) + \gamma(x^3 + 3x^2 + 1)$$

est le cube parfait d'une fonction linéaire de x.

13. Exprimer que le quotient

$$\frac{x^n + x^{n-1} + \cdots + 1}{x^p + x^{p-1} + \cdots + 1}$$

est entier.

14. Exprimer que le polynome

$$x^4 + 4ax^3 + 4bx^2 + 1$$

a avec sa dérivée un facteur commun du deuxième degré.

15. Exprimer que

$$ax^2 + bxy + cx + d + \lambda(\alpha y^2 + \beta y^2 + \gamma x + \delta)$$

est un carré parfait.

16. Décomposer

$$x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1$$

en un produit de deux facteurs réels du deuxième degré.

17. Même question pour

$$(x^2 + x + 1)^2 + 1.$$

18. Décomposer

$$x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 30x + 24 = 0$$

en un produit de facteurs réels du second degré. (FINCK.)

19. De la formule

$$x - 1 = \mathrm{L}x + \frac{1}{1.2}(\mathrm{L}x)^2 + \frac{1}{1.2.3}(\mathrm{L}x)^3 + \frac{1}{1.2.3.4}(\mathrm{L}x)^4 + \cdots,$$

déduire la suivante :

$$\mathrm{L}x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots$$

Ceci est une application de la méthode dite du *Retour des suites*, qui consiste, ayant une expression de y en série infinie,

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots,$$

à déterminer x au moyen d'une autre suite infinie

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + \cdots,$$

ce à quoi on peut arriver en employant la méthode des coefficients indéterminés.

20. De la formule

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

déduire le développement de x par rapport aux puissances de $\sin x$.

21. De la formule

$$z = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots,$$

déduire celle-ci :

$$x = z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} - \cdots.$$

(STONE, *Analyse des infiniment petits*, 1735.)

22. Vérifier la formule

$$(x+a)^m = x^m + ma(x+b)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a(a-2b)(x+2b)^{m-2}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}a(a-3b)^2(x+3b)^{m-3} + \cdots$$

(m entier positif).

23. Trouver le nombre de manières de tourner cette phrase fameuse :

Belle marquise — vos beaux yeux — me font — mourir — d'amour.

24. Nombre de permutations des quatre vers

Avec sa pelle,
Dans sa chapelle,
Saint Honoré
Est honoré.

25. Trouver le nombre de combinaisons du vers

Rex, lex, sol, dux, fons, lux, mons, pax, Christus.

(VOSSIUS.)

26. « On demande à combien de personnes se montent les ancestres en 30 générations, en supposant que les mariages ne se soient point faits entre les descendans des premières et plus anciennes générations ».

27. « Au jeu des eschecs, les 8 pions peuvent avancer une ou deux cases au premier coup. On demande en combien de façons on peut jouer ces 8 pions, en ne jouant chacun d'eux qu'une seule fois ».

(Pour ces deux questions, voyez DE FRÉNICLE, *Abrégé des Combinaisons*.)

28. Le prieur des Célestins de Sens en 1778 avait une serrure présentant quatre cercles qui portaient chacun 24 lettres, ce qui faisait 331.776 combinaisons.

29. Quel est le coefficient de x^7 dans le développement de

$$(a + bx + cx^2 + dx^3)^4 \text{ ?}$$

30. « On a six places à pourvoir de commandans, mais on n'en veut placer d'abord que trois : on demande en combien de manières on peut placer dans trois de ces places trois de ces commandans pris dans six qui sont arrestez ».
(De Frénicle, 1643.)

31. De combien de manières peut-on écrire les vers suivants [1] :

Lex, Rex, Grex, Res, Spes, Thus, Sal, Sol, (bona) Lux, Laus :
Mars, Mors, Sors, Lis, Vis, Styx, Pus, Nox, Fex, (mala) Crux, Fraus.

32. *Carré arithmétique de Fermat.* — Prenant ce carré pour un échiquier à n^2 cases, trouver le nombre de marches possibles d'une tour venant de l'origine et marchant suivant ——→ et ↓ sans rétrograder.

Rappelons par le tableau ci-dessous ce qu'on appelle carré de Fermat, symétrique par rapport à sa diagonale ╲ :

1	1	1	1	1 ...
1	2	3	4	5 ...
1	3	6	10	15 ...
1	4	10	20	35 . .
1	5	15	35	70 . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

33. Loi de formation des puissances de 11 :

11, 121, 1331, 14641, ...

34. Démontrer au moyen des combinaisons les formules

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1 = n\,\frac{(n-1)}{2},$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}+\cdots+1 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.$$

35. « Un baril est rempli d'un nombre c de pots de vin ; chaque jour un valet fripon en tire un pot par la clé, qu'il remplace d'un pot d'eau qu'il verse par le bondon. On demande combien, au bout d'un nombre n de jours, il restera de vin dans le baril. »

36. Le nombre des intersections intérieures des diagonales d'un polygone convexe de n côtés est égal au nombre de combinaisons de ses n sommets 4 à 4. (*Nouvelles Annales.*)

37. Trouver la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{p=n} \frac{n(n+1)\ldots(n+p)}{(p+1)!}$.

---

(1) « Huc pertinent versus nonnulli ob variationum multitudinem *Protei* dicti, quos inter celebrantur Lansii, Scaligeri, Bauhusii, Thomæ Lansio hoc distichon debemus : Lex, Rex, ...».
(*Ars Conjectandi*, p. 77.)

38. Quelle valeur faut-il donner à m pour que le dixième terme du développement de $(2+m)^m$ soit le plus grand? Réponse $m = 10$.

39. On a un système de points dans un plan et tels qu'il n'y en ait pas trois en ligne droite. On les joint de toutes les manières possibles et on prend les milieux des droites ainsi obtenues : on obtient un nouveau système de points qu'on suppose tels qu'il n'y en ait pas trois en ligne droite. On les joint deux à deux : trouver le nombre des points d'intersection des droites ainsi obtenues, sans tenir compte des points du deuxième système.

40. Trouver la somme des coefficients des termes du développement de $(x+a)^m$ de deux en deux, de trois en trois, ..., de p en p.

41. Démontrer que

$$\sum_{p=0}^{p=y} C_{x+p,x}(C_{x+y,x+p})^2 = C_{x+2y,y}C_{x+y,y}.$$

42 Calculer les sommes

$$\frac{b\lambda^2}{a^2} + \frac{4b\lambda^2}{a^2} + \frac{9b\lambda^2}{a^2} + \cdots + \frac{n^2b\lambda^2}{a^2},$$

$$\frac{b\varepsilon^2}{a^2} + \frac{9b\varepsilon^2}{a^2} + \cdots + \frac{(2n-1)^2b\varepsilon^2}{a^2},$$

où on a posé

$$\lambda = \frac{a}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = \frac{a}{2n+1}.$$

(Calcul de la somme des longueurs des travées des ponts).

43. Démontrer la formule suivante, où on fait $\lambda = 3m$ ou $\lambda = 3m+1$:

$$C^1_{\lambda+1} - 3C^3_{\lambda+1} + 3^2C^5_{\lambda+1} - \cdots = \pm 2^\lambda.$$

Opérer directement, ou remarquer que dans le développement de

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - \cdots,$$

les coefficients sont alternativement $1, -1$ et 0, et que d'autre part, le coefficient de x^λ est

$$(-1)^{\lambda+2}\frac{(1+i\sqrt{3})^{\lambda+1} - (1-i\sqrt{3})^{\lambda+1}}{2^{\lambda+1}i\sqrt{3}}.$$

44. Démontrer que le nombre

$$C^1_n + 5C^3_n + 5^2C^5_n + \cdots$$

est multiple de 2^{n-1}.

Partir du développement de $\frac{1}{1-x-x^2}$, dont les coefficients forment la série de Lamé. L'expression du coefficient de x^{n-1} est ici

$$\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

45. En général, a et b étant entiers, b pouvant être nul, le nombre

$$C^1_n + (a^2-4b)C^3_n + (a^2-4b)^2C^5_n + \cdots$$

est multiple de 2^{n-1}. (*Nouvelles Annales*, WEILL, février 1887; WORONTZOFF, février 1888.)

46. Avec m lettres dont α sont égales à a, β à b, on forme des arrangements avec répétitions p à p. Combien en trouvera-t-on contenant h fois la lettre a, et k fois la lettre b ?

Réponse $\frac{P_m}{P_h P_k} C_{m-\alpha-\beta}^{p-h-k}$. (*Algèbre de* NIEWENGLOWSKI.)

47. Lorsque, dans une permutation rectiligne des n premiers nombres, un nombre quelconque précède un autre nombre plus petit que lui, on dit qu'il y a *dérangement*. Combien y a-t-il en tout de dérangements dans le tableau des permutations des n premiers nombres ? (*Algèbre de* J. BERTRAND.)

Résultat $D_n = \frac{P_n C_n^2}{2}$.

48. On écrit les pn premiers nombres entiers formant p groupes de n termes. Les sommes des carrés des termes des groupes successifs tendent à devenir proportionnelles à 1, 7, 19, 37, 61, 91, ... lorsque n augmente indéfiniment.

49. Même question, en remplaçant les carrés par les cubes. Les nombres auxquels les sommes de cubes tendent à devenir proportionnelles sont : 1, 15, 65, 175, 369, 671, ...

50. Une personne emprunte un capital A et s'engage à se libérer au moyen de n payements effectués d'année en année. Le premier de ces payements vaut a et doit être effectué un an après l'emprunt. Les annuités successives forment une progression par quotient dont la raison est q. On calcule les intérêts composés, au taux de r pour 1 franc par an.

Cela posé, on demande :

1° D'établir la relation qui doit exister entre les quantités A, a, q, r, n ;

2° De chercher ce que devient cette relation lorsqu'on suppose $q = 1 + r$;

3° De calculer, à 1 unité près, la valeur de n en admettant qu'on ait $a = \frac{A}{5}$; $q = 0{,}9$; $r = 0{,}035$.

51 De combien de manières peut-on former un drapeau tricolore avec les 7 couleurs du spectre solaire, plus le blanc et le noir ? Combien y aura-t-il de drapeaux différents offrant les 3 mêmes couleurs ?

(Les quatre questions qui précèdent sont extraites des *Premiers principes d'algèbre*, par C.-A. LAISANT et Elie PERRIN).

52. Déterminer le nombre de mots que l'on peut former avec 19 consonnes et 5 voyelles, chaque mot étant composé de 3 consonnes et de 2 voyelles, en excluant tous les mots renfermant 3 consonnes de suite.

Réponse 1200325. (GUILMIN.)

53. De combien de manières le premier membre d'une équation de degré $2m$ peut-il se décomposer en facteurs du second degré ?

Réponse $1.3.5.7\ldots(2m-1)$. (GUILMIN.)

54. De combien de manières le premier membre d'une équation de degré $2m+1$ peut-il se décomposer en un produit de facteurs du deuxième degré, multiplié par un facteur du premier?

Réponse $1.3.5.7..(2m-1)(2m+1)$. (GUILMIN.)

55. De combien de manières peut-on décomposer un produit de $3m$ facteurs linéaires en facteurs du troisième degré?

Réponse $\frac{1}{1.2}[1.2.4.5.7.8..(3m-2)(3m-1)]$.

(GUILMIN.)

56. Combien y a-t-il de nombres différents dans la table de Pythagore?

Réponse 36. (GUILMIN.)

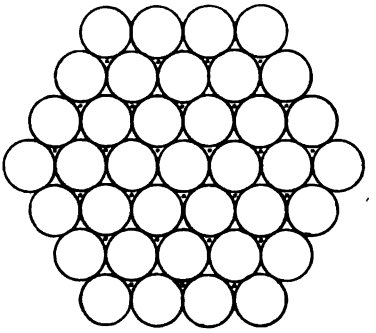


Figure extraite des *Nouvelles Annales*.

57. Nombre de boulets d'une pile hexagonale de côté n.

Réponse $\frac{4n^3-3n^2+n}{2}$.

(BACH.)

Sur la figure, nous représentons la base de la pile : les points indiquent la place des boulets de la couche supérieure.

58. « On a 21 cartes qu'on distribue 3 par 3 en 3 paquets de 7 cartes ; on fait penser une carte, et on demande le paquet qui la contient, et on le place au milieu du paquet total formé par les 3 paquets : on fait la même distribution une 2e fois, on demande le paquet, on le place au milieu : on fait une 3e distribution, et on place le paquet de la carte au milieu. La carte se trouve au milieu du paquet total, c'est-à-dire au onzième rang. »

(VACHETTE.)

« Ce fait est général pour $2m+1$ paquets composés de $2n+1$ cartes. Suivant les valeurs relatives de m et n, il arrive après la seconde, la troisième ou la $p^{ième}$ distribution. »

59. Somme de toutes les permutations différentes d'un nombre donné.

Résultat $\frac{n!}{n}\times s\times\frac{10^n-1}{10-1}$,

où n est le nombre des chiffres, s leur somme, en supposant tous les chiffres différents. Examiner le cas où il y a p chiffres d'une espèce, q d'une autre, etc., et en particulier le cas où tous les chiffres sont égaux.

(Aristide MARRE.)

60. Trouver par la méthode des coefficients indéterminés la loi du développement de

$$(x+t)(x+t^2)(x+t^3)\ldots(x+t^n).$$

Le développement est de la forme

$$A_{0,n}x^n + A_{1,n}x^{n-1} + \dots + A_{n-1,n}x + A_{n,n}.$$

En posant de même

$$(x+t)(x+t^2)(x+t^3)\dots(x+t^{n-1}) = A_{0,n-1}x^{n-1} + A_{1,n-1}x^{n-2} + \dots + A_{n-2,n-1}x + A_{n-1,n-1},$$

on a

$$(A_{0,n-1}x^{n-1} + A_{1,n-1}x^{n-2} + \dots + A_{n-1,n-1})(x+t^n) = A_{0,n}x^n + A_{1,n}x^{n-1} + \dots + A_{n-1,n}x + A_{n,n}.$$

Identifiant les deux membres, il vient

$$(1)\quad \begin{cases} A_{0,n} = A_{0,n-1}, \\ A_{1,n} = A_{0,n-1}t^n + A_{1,n-1}, \\ A_{2,n} = A_{1,n-1}t^n + A_{2,n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{n,n} = A_{n-1,n-1}t^n. \end{cases}$$

Il s'agit d'obtenir $A_{0,n}$; $A_{1,n}$; $A_{2,n}$ ...

D'abord $\qquad A_{0,n} = A_{0,n-1} = 1.$

Par suite

$$\begin{cases} A_{1,n} = t^n + A_{1,n-1}, \\ A_{1,n-1} = t^{n-1} + A_{1,n-2}, \\ A_{1,n-2} = t^{n-2} + A_{1,n-3}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{1,1} = t. \end{cases}$$

d'où, en additionnant membre à membre,

$$A_{1,n} = \frac{t}{t-1}(t^n - 1).$$

De même on aura

$$A_{2,n} = \frac{t}{t-1}\,\frac{t^2}{t^2-1}(t^n-1)(t^{n-1}-1).$$

On en déduira facilement la loi du développement.

61. Trouver la loi du développement de

$$(1+ax)(1+a^2x)\dots(1+a^nx).$$

Le coefficient du terme en x^p est

$$A_p = a^{\frac{p(p+1)}{2}}\,\frac{(a^n-1)(a^{n-1}-1)\dots(a^{n-p+1}-1)}{(a-1)(a^2-1)\dots(a^p-1)}.$$

62. « Dans le développement du produit

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\dots,$$

savoir

$$1 - a - b + ab - c + ac + bc - abc - d + \dots,$$

quel est le signe du $n^{ième}$ terme ? »

On suppose les produits effectués suivant la règle ordinaire de la multiplication, c'est-à-dire qu'à chaque fois le multiplicande est multiplié, dans l'ordre de ses termes, successivement par chacun des termes du multiplicateur, pris dans leur ordre.

(Catalan, *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1880 ; Laisant, *Assoc. fr., Congr. d'Alger*, 1881.)

63. « Soit une série de progressions arithmétiques

$$\begin{array}{llll} a+\alpha, & a+2\alpha, & \dots, & a+n\alpha, \\ b+\beta, & b+2\beta, & \dots, & b+n\beta, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f+\varphi, & f+2\varphi, & \dots, & f+n\varphi, \end{array}$$

et supposons qu'on fasse le produit de tous les termes d'une même colonne, ce qui donnera la suite

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n.$$

« Posons

$$S_k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k.$$

« Si nous voulons avoir la somme

$$\Sigma = P_1 + P_2 + \cdots + P_n,$$

il suffira d'écrire la formule symbolique

$$\Sigma = (aS^0 + \alpha S)(bS^0 + \beta S)\ \ldots\ (fS^0 + \varphi S),$$

où tous les exposants de S devront être remplacés par des indices, une fois le produit effectué, S^0 étant d'ailleurs égal à n. »

« Il suffit, pour établir cette formule, de développer le terme général

$$P_m = (a + m\alpha)(b + m\beta)\ \ldots\ (f + m\varphi),$$

et d'effectuer la sommation pour chaque terme ».

(Laisant.)

64. Démontrer les formules

$$[N_\omega + n]^m = [N_\omega]^m + n[N_\omega]^{m-1} + n^2[N_\omega]^{m-2} + \cdots + n^{m-1}[N_\omega] + n^m,$$

$$[N_\omega - n_p]^m - [N_\omega - n_q]^m = (n_q - n_p)\ [N_\omega]^{m-1},$$

où p et q sont deux quelconques des nombres n_1, n_2, n_3 ...

65. Trouver $\sqrt{i}$.

66. Résoudre l'équation $x^8 + 1 = 0$.

67. Trouver $\sqrt{2+i}$.

68. Effectuer $(x+i)^m + (x-i)^m$.

69. Effectuer

$$(x+a)^m + (x+aj)^m + (x+aj^2)^m,$$

j et j^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité.

70. Remplacer, dans $(x+a)^m$, a successivement par les m racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité, et faire la somme des résultats obtenus.

71. On divise un cercle de rayon 1 en $2m$ parties égales aux points A_0, A_1, A_2, .. , A_{2m-1} ; on joint le centre O à ces points et on mène OP faisant avec OA_0 l'angle $\frac{a}{m}$. Sur cette droite on prend une longueur $OP = z$ arbitraire. Montrer que le produit des carrés des distances du point P aux points A_0, A_2, A_4, ... est égal à

$$z^{2m} - 2z^m \cos a + 1.$$

(Théorème de De Moivre, 1730 environ.)

72. En particulier, supposer P sur OA_0, et énoncer le résultat obtenu.

(Théorème de Côtes, 1714 environ.)

73. Développer $(x+iy)^m$, où i est quelconque. En déduire la formule de de Moivre.

74. Effectuer

$$(x-i)^m+(x+i)(x-i)^{m-1}+(x+i)^2(x-i)^{m-2}+\cdots+(x+i)^m.$$

75. Résoudre les équations

$$ny-\frac{n^2-1}{3!}ny^3+\frac{(n^2-1)(n^2-9)}{5!}ny^5-\cdots=a,$$

$$1-\frac{n^2}{2!}y^2+\frac{n^2(n^2-4)}{4!}y^4-\cdots=a.$$

(De Moivre, *Æquationum quarumdam potestatis tertiæ*, etc., 1732.)

76. Les côtés des polygones réguliers de 30 côtés inscrits à un cercle de rayon 1 ont pour expressions

$$2\sin\frac{\pi}{30}=\frac{1}{4}\left[\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1\right],$$

$$2\sin\frac{7\pi}{30}=\frac{1}{4}\left[\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right],$$

$$2\sin\frac{11\pi}{30}=\frac{1}{4}\left[\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right],$$

$$2\sin\frac{13\pi}{30}=\frac{1}{4}\left[\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right].$$

(G. Dostor.)

77. Résoudre l'équation

$$x^n-nax^{n-1}-\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3}-\cdots-a^n=0.$$

(Euler.)

78. Trouver le plus grand commun diviseur entre les binomes x^m-1 et x^n-1.

79. Calculer par logarithmes l'expression

$$(2+3i)^{1000}+(2-3i)^{1000}.$$

80. Trouver sans se servir des dérivées le plus grand nombre de la suite

$$\sqrt[2]{2},\qquad \sqrt[3]{3},\qquad \sqrt[4]{4},\qquad \ldots$$

81. Indiquer comment on peut construire une table de logarithmes où les logarithmes, calculés à 9 décimales, vont en croissant arithmétiquement de 10 en 10, à partir de zéro. (*Tables de* Byrge : *Arithmetische und geometrische progrese Tabulen*, *Prague*, 1620.)

CHAPITRE II

CONVERGENCE DES SÉRIES
SOMMATION DANS QUELQUES CAS SIMPLES

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — *Dans quel cas la série*

$$(1) \qquad 1 + \frac{1}{2(\log 2)^n} + \frac{1}{3(\log 3)^n} + \frac{1}{4(\log 4)^n} + \cdots$$

est-elle convergente ?

Cette série est convergente en même temps que la suivante :

$$1 + 2\frac{1}{2(\log 2)^n} + 4\frac{1}{4(\log 4)^n} + \cdots + 2^p\frac{1}{2^p(\log 2^p)^n} + \cdots,$$

ou, puisque $(\log 2^p)^n = p^n(\log 2)^n$, (1) est convergente avec

$$(2) \quad 1 + \frac{1}{(\log 2)^n} + \frac{1}{2^n(\log 2)^n} + \frac{1}{3^n(\log 2)^n} + \cdots + \frac{1}{p^n(\log 2)^n} + \cdots$$

Faisant abstraction du premier terme, et enlevant partout le facteur $\frac{1}{(\log 2)^n}$, (2) devient

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

Cette dernière suite est convergente en même temps que

$$1 + \frac{2}{2^n} + \frac{4}{4^n} + \frac{8}{8^n} + \cdots,$$

ou que

$$(3) \qquad 1 + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{8^{n-1}} + \cdots;$$

or (3) est une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{2^{n-1}}$, et dont la condition de convergence est $\frac{1}{2^{n-1}} > 1$ ou $n > 1$. Telle est donc aussi la condition de convergence de (1).

Question II. — *Les deux séries*

$$S = 1 + x \cos \alpha + x^2 \cos 2\alpha + \cdots + x^n \cos n\alpha + \cdots$$
$$\Sigma = \quad x \sin \alpha + x^2 \sin 2\alpha + \cdots + x^n \sin n\alpha + \cdots$$

sont convergentes pour $x < 1$ *en valeurs absolues : trouver leurs sommes.*

On a

$$\begin{aligned} Si + \Sigma &= 1 + x(\cos \alpha + i \sin \alpha) + x^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + \cdots \\ &\qquad + x^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) + \cdots \\ &= 1 + x(\cos \alpha + i \sin \alpha) + x^2(\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 + \cdots \\ &\qquad + x^n(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n + \cdots \end{aligned}$$

Le deuxième membre renferme une progression géométrique de raison imaginaire (le module de cette raison étant < 1). Un raisonnement analogue à celui qu'on fait dans le cas d'une progression géométrique décroissante montre que la somme des termes de la série tend vers $\frac{1}{1 - x(\cos \alpha + i \sin \alpha)}$.

On a alors, en égalant séparément, dans la relation précédente, les parties réelles et les parties imaginaires,

$$S = \frac{1 - x \cos \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2},$$

$$\Sigma = \frac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}.$$

Question III. — *Reconnaître la convergence ou la divergence des séries*

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \cdots \quad (S)$$

$$1 + 3x + 6x^2 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} + \cdots \quad (\Sigma)$$

Lorsqu'elles sont convergentes, sommer ces séries.

Dans chacune d'elles, le rapport d'un terme au précédent a pour limite x. Donc il y a convergence si $x < 1$ en valeur absolue, divergence si $x > 1$ en valeur absolue. Pour $x = 1$ en valeur absolue, il y a encore évidemment divergence.

On a d'ailleurs, dans le cas de convergence,

$$S = \frac{1 + x + x^2 + x^3 + \cdots}{1 - x},$$

$$\Sigma = \frac{1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots}{1 - x},$$

d'où

$$S = \frac{1}{(1 - x)^2},$$

$$\Sigma = \frac{1}{(1 - x)^3}.$$

Question IV. — *Soit une série*

$$u_1, \; u_2, \; \ldots \; u_n, \; u_{n+1}, \; \ldots$$

dont chaque terme puisse se décomposer de la façon suivante :

$$a_1 - a_2, \quad a_2 - a_3, \quad \ldots \quad a_n - a_{n+1}, \quad a_{n+1} - a_{n+2}, \quad \ldots$$

et où on suppose d'ailleurs que $\lim\limits_{p=\infty} a_{n+p} = 0$.

La série est convergente et sa somme est a_1.

En effet la somme des $n + p - 1$ premiers termes de la série est

$$S_{n+p-1} = a_1 - a_{n+p},$$

et si p augmente indéfiniment, on a bien

$$\lim S_{n+p-1} = a_1.$$

Exemple. — Posons $a_1 = \text{arc tg} \dfrac{\alpha}{\beta}$, $a_2 = \text{arc tg} \dfrac{\alpha}{\beta + \gamma}$, $\ldots$ $a_n = \text{arc tg} \dfrac{\alpha}{\beta + (n-1)\gamma}$, $\ldots$.

Ici $u_n = a_n - a_{n+1} = \text{arc tg} \dfrac{\alpha}{\beta + (n-1)\gamma} - \text{arc tg} \dfrac{\alpha}{\beta + n\gamma}$,

$$\text{tg}\,(a_n - a_{n+1}) = \frac{\alpha\gamma}{[\beta + (n-1)\gamma][\beta + n\gamma] + \alpha^2},$$

et

$$u_n = \text{arc tg} \frac{\alpha\gamma}{[\beta + (n-1)\gamma][\beta + n\gamma] + \alpha^2}.$$

Si n croît indéfiniment, a_n tend vers zéro, donc la série dont le terme général est u_n est convergente et sa somme est $\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\beta}$.

En faisant $\alpha = \beta = \gamma = 1$, on trouvera aisément

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{13} + \ldots + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n^2+n+1} + \ldots$$

Question V. — *Conditions de convergence de la série dont le terme général est* $\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}$, φ *et* ψ *étant deux polynomes entiers.*

Il faut d'abord

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} = 0,$$

ce qui exige que le degré de ψ soit supérieur à celui de φ.

Posons alors

$$\varphi(n) = A_0 n^p + \ldots,$$
$$\psi(n) = A_0 n^{p+q} + \ldots,$$

en ordonnant ces polynomes par rapport aux puissances décroissantes de n. Le rapport d'un terme au précédent,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\psi(n)\varphi(n+1)}{\varphi(n)\psi(n+1)},$$

a pour limite l'unité : nous sommes dans l'incertitude. Mais au bout d'un certain rang, tous les termes sont de même signe, et nous pouvons appliquer tel caractère de convergence qu'il nous plaira. Il faut

$$\lim nu_n = 0,$$

ce qui entraîne $q > 1$. Cette condition étant remplie, nous avons

$$\lim n^q u_n = \frac{A_0}{B_0} \gtrless 0,$$

et comme q est > 1, la série est convergente.

Question VI. — Divergence de la série harmonique.

« *Summa seriei infinitæ harmonicè progressionalium*

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \quad \textit{etc.}$$

est infinita ».

Supposons cette série convergente et posons

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots,$$

ou

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30} + \frac{6}{42} + \cdots$$

Cette série se décompose de la façon suivante :

$$S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \cdots = \frac{1}{1},$$

$$S_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \cdots = S_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$S_3 = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \cdots = S_2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

$$S_4 = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \cdots = S_3 - \frac{1}{12} = \frac{1}{4},$$

. . . . . .

Nous en déduisons, en additionnant membre à membre :

$$S = 1 + S,$$

ce qui est absurde. Ainsi la série considérée ne saurait être convergente. (Jacobi BERNOULLI *Ars conjectandi*, p. 250.)

Question VII. — *On ne peut altérer l'ordre des termes d'une série qui n'est pas absolument convergente.*

M. Bertrand fait remarquer (*Calcul différentiel*, p. 250) que lorsqu'une série n'est pas absolument convergente, on ne peut changer l'ordre dans lequel ses termes se trouvent écrits. Cette opération peut altérer sa somme, ou même lui faire perdre sa convergence. En effet :

Pour le premier cas, M. Bertrand cite d'après Dirichlet l'exemple suivant :

« Les séries :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdots,$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \cdots,$$

« qui sont composées des mêmes termes affectés des mêmes signes, « n'ont cependant pas la même limite ; on peut prouver facilement que « la première étant représentée par S, la seconde est $\frac{3}{2}$ S. »

Donnons un exemple du second cas, et à cet effet considérons les séries

$$\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\cdots,(S')$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots,(\Sigma')$$

dont les termes sont respectivement les racines carrées des termes correspondants des deux séries précédentes. La série S′ est encore évidemment convergente ; or nous avons

$$\Sigma'_{3n}=S'_{2n}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n-1}},$$

d'où

$$\Sigma'_{3n}>S'_{2n}+\frac{n}{\sqrt{4n-1}}.$$

Si nous faisons croître n indéfiniment, S'_{2n} tend vers une limite, $\frac{n}{\sqrt{4n-1}}$ augmente indéfiniment, donc Σ' est divergente.

Question VIII. — *Sommation de certaines séries déduite de la série harmonique.*

« Soit la série harmonique

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots,$$

que je nomme A sans m'inquiéter si sa somme est finie ou infinie. Si de A j'ôte la même somme tronquée de son premier terme de cette manière :

$$\begin{array}{ll} A & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots, \\ -B & \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots, \end{array}$$

on aura

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots=A-B.$$

Mais $B=A-1$, conséquemment ce reste sera égal à 1. Ainsi la série ci-dessus, ou

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\cdots,$$

est égale à l'unité ».

« Donnons encore un exemple de ce procédé : que de la série

$$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

on ôte la même somme tronquée de ses deux premiers termes et conséquemment moindre de $1 + \frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$, on aura

$$\frac{2}{1.3} + \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{4.6} + \frac{2}{6.8} + \cdots$$

conséquemment égale à $\frac{3}{2}$ ».

(MONTUCLA, t. III, p. 209, d'après les Bernoulli) [1].

Il est clair que ce raisonnement, quoique conduisant à des résultats justes, manque de rigueur. Mais il est facile de le corriger.

Question IX. — « SUR UN THÉORÈME GÉNÉRAL DE CONVERGENCE ».

« THÉORÈME. — *La série à termes positifs Σu_n sera convergente, si, à partir d'une certaine valeur du nombre entier et positif n,*

$$(1) \qquad a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > \mu,$$

a_n étant une fonction positive de n et μ une constante positive.

« De l'inégalité (1) en découle une autre :

$$u_{n+1} < \frac{1}{\mu}(a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}),$$

d'où il suit

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m} < \frac{1}{\mu}(a_n u_n - a_{n+m} u_{n+m}) < \frac{1}{\mu} a_n u_n.$$

Le théorème est donc démontré.

---

(1) Bernoulli s'exprime ainsi (*de Seriebus infinitis*, prop. XV) :
« A serie

$$N = \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \ldots$$

« substracta series

$$\frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \frac{a}{6c} + \ldots = N - \frac{a}{c}.$$

« relinquit seriem

$$Q = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{30c} + \ldots = \frac{a}{c},$$

« cujus duplum

$$R = \frac{a}{c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{15c} + \ldots = \frac{2a}{c}. »$$

« En posant $a_n = 1$, on a le critère de convergence de Cauchy

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 > \mu \qquad \text{ou} \qquad \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \mu,$$

et le reste de la série à partir du terme u_n sera plus petit que $\frac{1}{\mu} u_n$.

« Si, au contraire,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1, \qquad \text{d'où} \qquad u_n < u_{n+1},$$

u_n est croissant avec n, et la série sera divergente.

« En posant $a_n = n$ on a le critère de Duhamel

$$n\frac{u_n}{u_{n+1}} - n - 1 > \mu \qquad \text{ou} \qquad n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1 + \mu,$$

et le reste sera plus petit que $\frac{1}{\mu} nu_n$.

« Si, au contraire,

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1, \qquad \text{d'où} \qquad nu_n < (n+1)u_{n+1},$$

nu_n est croissant avec n, et la série sera divergente.

« Pour $a_n = n \log n$, $n \log n \log\log n$, ..., nous aurons les critères de M. Bertrand.

« Etant donnée une série quelconque à termes positifs Σu_n, il n'y a aucune difficulté à démontrer que l'on peut toujours trouver un a_n satisfaisant à l'inégalité (1) et que l'on peut même choisir a_n d'une telle manière que $\sum \frac{1}{a_n}$ soit divergente. Le théorème en question est donc général dans le domaine des séries à termes positifs, aussi bien que le suivant :

« THÉORÈME. — *La série à termes positifs Σu_n sera* $\left\{\begin{matrix}\textit{convergente}\\ \textit{divergente}\end{matrix}\right\}$, *si*, *à partir d'une certaine valeur de n*,

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \left\{\begin{matrix} > \mu \\ < 0 \end{matrix}\right.,$$

a_n et μ étant positifs et la série $\sum \frac{1}{a_n}$ divergente.

« Dans le second cas, qui seul reste à démontrer, on a pour $n \geqq n'$,

$$a_n u_n > a_{n'} u_{n'} \qquad \text{ou} \qquad u_n > \frac{1}{a_n} a_{n'} u_{n'}.$$

C. Q. F. D.

« En général, nous pouvons prendre $a_n = \frac{\lambda_n}{b_{n+1} - b_n}$, si λ_n reste fini, tandis que b_n grandit sans cesse et infiniment avec n ».

(JENSEN, *Nouvelles Annales de mathématiques*, avril 1888.)

(Voyez aussi dans le même Journal, septembre 1888, un article de M. CESARO.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1. La série dont le $n^{ième}$ terme est $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ est divergente.

Etudier les séries suivantes :

2. $$\frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^3+1} + \frac{x^3}{x^4+1} + \dots .$$

(x est réel et quelconque).

3. $$\begin{cases} 1 - \sqrt{10} + \sqrt[3]{10} - \sqrt[4]{10} + \dots, \\ (1 - \sqrt{10}) + (\sqrt[3]{10} - \sqrt[4]{10}) + \dots . \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \sqrt{2} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} - \sqrt[5]{2} + \dots, \\ (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}) + (\sqrt[4]{2} - \sqrt[5]{2}) + \dots . \end{cases}$$

5. $$1 + \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{3^3} + \frac{x^3}{4^4} + \dots .$$

6. $$\frac{1}{x+1} + \frac{x^2}{x^3+1} + \frac{x^4}{x^5+1} + \frac{x^6}{x^7+1} + \dots .$$

7. $$\frac{x}{x^3+1} + \frac{x^3}{x^6+1} + \frac{x^5}{x^9+1} + \frac{x^7}{x^{12}+1} + \dots .$$

8. $$\frac{x-1}{x^3+1} + \frac{x^2-1}{x^4+1} + \frac{x^3-1}{x^5+1} + \dots .$$

9. $$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots .$$

10. $$\begin{cases} \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots, \\ \left(\frac{2}{1} - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4}\right) + \dots . \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} 10^1 - 10^{\frac{1}{2}} + 10^{\frac{1}{3}} - 10^{\frac{1}{4}} + \dots, \\ \left(10^1 - 10^{\frac{1}{2}}\right) + \left(10^{\frac{1}{3}} - 10^{\frac{1}{4}}\right) + \dots. \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} 2 - 2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{3}{4}} + 2^{\frac{4}{5}} - 2^{\frac{5}{6}} + \dots, \\ \left(2 - 2^{\frac{1}{2}}\right) + \left(2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{3}{4}}\right) + \left(2^{\frac{4}{5}} - 2^{\frac{5}{6}}\right) + \dots. \end{cases}$$

13. $$(\sqrt[2]{10} - \sqrt[3]{10}) + (\sqrt[4]{10} - \sqrt[5]{10}) + \dots.$$

14. $$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \frac{1}{(n+5)^2} + \dots.$$

15. $$1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{3p+1} + \dots.$$

16. $$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n} \dots$$

17. $$\begin{aligned} &\frac{1}{1^m}\frac{1}{1^m} + \frac{1}{1^m 2^m} + \frac{1}{1^m 3^m} + \frac{1}{1^m 4^m} + \dots \\ &+ \frac{1}{2^m}\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m 2^m} + \frac{1}{2^m 3^m} + \frac{1}{2^m 4^m} + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \frac{1}{p^m}\frac{1}{1^m} + \frac{1}{p^m 2^m} + \frac{1}{p^m 3^m} + \frac{1}{p^m 4^m} + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

La série est convergente pour $m > 1$. (LAURENT, *Traité d'algèbre.*)

18. Étudier la suite

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \quad \dots$$

Elle peut servir à diviser un nombre en moyenne et extrême raison, le carré de chaque terme étant à une unité près le produit des deux termes qui le comprennent.

(ALBERT GIRARD, 1634.)

Étudier les séries dont les termes de rang n ont pour expressions respectives :

19. $\mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

20. $\mathrm{L}\left(\frac{1+n}{n^2}\right)$.

21. $\frac{1}{(2n+1)^{2n+1}}$.

22. $\sin^2 \frac{a}{n^2}$.

23. $\dfrac{\cos \frac{x}{n}}{1 + \operatorname{cotg} \frac{2x}{n}}$.

24. $e^{f(n)}$.

25. $\dfrac{1}{(n+1)!}\dfrac{x^n}{n}$.

26. $\dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

27. $n^2\left(1-\cos\dfrac{x}{n^\alpha}\right)$.

28. $\dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$.

29. $\dfrac{1}{(\mathrm{L}n)^p}$.

30. $\dfrac{1}{n(\mathrm{L}n)^\alpha}$.

31. $\dfrac{1}{a+bx^n}$.

32. $\mathrm{L}(1+x^{2n})$.

33. $\dfrac{1}{n!}$.

34. $\dfrac{x^n}{x^{n+1}+1}$.

35. $\dfrac{x^n}{x^{2n}+1}$.

36. $\dfrac{x+1}{x^n+x+1}$.

37. $\dfrac{\cos n\alpha}{n}$.

38. $\dfrac{1}{n.n!}$.

39. $\dfrac{1}{n^n}$.

40. $\dfrac{1}{1.2.2^2.2^3\ldots 2^n}$.

41. $\dfrac{1}{n^2}$.

Trouver la valeur de la somme de chacune des quatre dernières séries à moins de $\dfrac{1}{10^3}$ près.

42. $(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{n}$.

43. $\dfrac{n^2+1}{(n+1)^m}x^n$.

44. La série dont le rapport d'un terme au précédent s'écrit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3}{4}+(-1)^n\frac{1}{2}$$

est convergente.

45. Étudier la série dont le terme général est

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{n}+\frac{u_{n-1}}{n-1}.$$

46. Peut-on dire quelque chose d'une série dont le terme général u_n est lié a une fonction $f(n)$ par la relation

$$|u_n|<f(n)-f(n+1)?$$

47 Soit $\varphi(n)$ une fonction de n telle que $\varphi(n)$ tende vers zéro lorsque n augmente, et que de plus la différence

$$\frac{u_n\varphi(n)}{a}-\frac{u_{n+1}\varphi(n+1)}{a}-u_{n+1},$$

où a est une constante arbitraire, soit positive pour n infini. La série dont le terme général est u_n est convergente. (Règle de Kummer. — Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 244.)

48. Comparer les deux séries

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdots,$$

$$S' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6},$$

et montrer que, sans connaître la valeur de S, on est assuré que

$$S' = \frac{3}{2} S.$$

(LEJEUNE-DIRICHLET. — BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 244.)

49. Soit une série à termes positifs, où le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ d'un terme au précédent, lorsque n augmente indéfiniment, tend vers 1 en restant inférieur à 1. Soit $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \alpha_n}$. Si $\lim n\alpha_n > 1$, la série est convergente; si $\lim n\alpha_n < 1$, la série est divergente; si $\lim n\alpha_n = 1$, il y a doute.

(DUHAMEL.)

50. Dans ce cas, « on pose $n\alpha_n = 1 + \beta_n$; β_n a pour limite 0, et l'on cherche la limite de $n\beta_n$. Si cette limite est différente de $+\infty$, la série est divergente ». (E. CAHEN.)

Applications :

51. 1° Soit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + an^{p-1} + bn^{p-2} + \cdots}{n^p + An^{p-1} + Bn^{p-2} + \cdots}.$$

La série est convergente pour $A - a > 1$, divergente pour $A - a \leqslant 1$.

(GAUSS.)

52. 2° La série dont le terme général est

$$u_{n+1} = (2 - \sqrt{e})(2 - \sqrt[3]{e}) \ldots (2 - \sqrt[n]{e})$$

est divergente. (E. CAHEN.)

53. La série dont le terme général est

$$u_n = \frac{1}{(n + 1 + \cos n\pi)^2}$$

est convergente. (CATALAN.)

54. La série dont le terme général est

$$u_n = \frac{1}{n + 1 + \cos n\pi}$$

est divergente. (CATALAN.)

55. La série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n \sin \frac{n\pi}{2} - n^2 \cos \frac{n\pi}{2}}$$

est convergente. (CATALAN.)

56. La série

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

est convergente quand

$$\lim_{n=\infty} \frac{2^n u_{2^n}}{u_n} = k < 1.$$

divergente quand

$$\lim_{n=\infty} \frac{2^n u_{2^n}}{u_n} = k > 2.$$

(CHATOUNOVSKY, *Journal de Math. Spéciales*, février 1894.)

57. Trouver la somme des n premiers termes de la série

$$1 + 11 + 111 + 1111 + \cdots$$

Sommer les séries

58. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \cdots$. On trouve 1.

59 $1 + \frac{2}{1} + \frac{3}{1.2} + \cdots + \frac{n-1}{n!} + \cdots$. On trouve $2e$.

60 $\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{tg} \frac{x}{8} + \cdots$ On trouve $\frac{1}{x} - 2 \cot 2x$.

61 $1 + 4x + 9x^2 + \cdots + (n+1)^2 x^n + \cdots$.

62. Démontrer que

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

et que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)} + \cdots + \frac{1}{(z+n)(z+n+1)} + \cdots$$

63. Trouver $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

On remarque que

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

64. Montrer que le produit

$$(1+x^{2^0})(1+x^{2^1}) \ldots (1+x^{2^n}) \ldots$$

a pour limite $\frac{1}{1-x}$ quand $x < 1$.

En développant le premier membre, on trouve en effet

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{\frac{n(n+1)}{2}} + \cdots,$$

progression géométrique décroissante.

65. Trouver la somme des n premiers termes de la série

$$1.4.7 + 4.7.10 + 7.10.13 + 10.13.16 + \cdots$$

66. Même question pour

$$\frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+\frac{1}{13.17}+\cdots$$

Démontrer avec Leibniz et Bernoulli que l'on a :

67. $$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\ldots=1\frac{1}{1}.$$

68. $$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}+\ldots=1\frac{1}{2}.$$

69. $$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}+\cdots=1\frac{1}{3}.$$

70. $$\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}+\frac{1}{126}+\frac{1}{252}+\ldots=1\frac{1}{4}.$$

. . . . . .

(Jacobi Bernoulli *Ars Conjectandi*, p. 255.)

Démontrer avec Leibniz (1682) que :

71. $$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\ldots=\frac{3}{4}.$$

72. $$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\ldots=\frac{1}{2}.$$

73. $$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}+\ldots=\frac{1}{4}.$$

D'après Leibniz (1683), on a :

74. $$1-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\ldots=\frac{20}{21}.$$

75. $$1-\frac{2}{20}+\frac{3}{400}-\frac{4}{8000}+\ldots=\frac{400}{441}.$$

76. $$1-\frac{3}{20}+\frac{6}{400}-\frac{10}{8000}+\ldots=\frac{8000}{9261}.$$

D'après Jacques Bernoulli, on a :

77. $$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{10}+\frac{5}{32}+\ldots=2.$$

78. $$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{6}{8}+\frac{10}{16}+\frac{15}{32}+\cdots=4.$$

79. $$\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{10}{8}+\frac{20}{16}+\frac{35}{32}+\ldots=8.$$

80. $$\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{9}{8}+\frac{16}{16}+\frac{25}{32}+\ldots=6.$$

81. $$\frac{1}{2}+\frac{8}{4}+\frac{27}{8}+\frac{64}{16}+\frac{125}{32}+\ldots=26.$$

(*Ars Conjectandi*, p. 249.)

82. Etudier la série

$$\frac{1}{x}-\frac{x}{x+1}+\frac{x(x-1)}{(x+1((x+2)}-\ldots.$$

83. La série dont le terme de rang p est $\frac{1}{p^2-1}$ est-elle convergente? La sommer.

84. Étudier la série

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{(a+1)(b+2)}+\frac{c}{(a+1)(b+2)(c+3)}+\ldots,$$

où a, b, c, ... sont tous positifs.

85. Étudier la série dont le terme de rang p est

$$1-\cos\frac{\pi}{p}.$$

86. Étudier la série

$$\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2-1}-\frac{1}{3^2+1}+\ldots.$$

87. Étudier la série dont le terme de rang n est

$$\frac{n^a}{1+nb}.$$

88. Étudier les séries dont les termes de rang n sont respectivement

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+n^2},\qquad \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sqrt{n}},\qquad \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{n}}.$$

89. Soient les deux sommes

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots,\qquad \frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots.$$

Démontrer que la seconde est les $\frac{3}{4}$ de la première.

90. Plus généralement, en posant

$$x=\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\ldots,\qquad y=\frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\ldots,$$

on a (m entier positif) $$\frac{y}{x}=\frac{2^m-1}{2^m}.$$

(*Ars Conjectandi*, p. 261-262).

CHAPITRE III

INFINIMENT PETITS

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — *Trouver l'ordre infinitésimal de*

$$y = 1 - \sin \frac{\pi}{2}(1 + x).$$

1° En développant $\sin \frac{\pi}{2}(1+x)$ par la formule de Mac-Laurin, on a

$$\sin \frac{\pi}{2}(1 + x) = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{8} + \frac{\pi^4 x^4}{384} - \dots$$

et

$$y = \frac{\pi^2 x^2}{8} - \frac{\pi^4 x^4}{384} + \dots ;$$

ainsi y est infiniment petit d'ordre 2, la partie principale étant $\frac{\pi^2 x^2}{8}$.

2° On peut écrire $y = 2 \sin^2 \frac{\pi x}{4}$, et dans le second membre remplacer, pour avoir la partie principale, $\sin \frac{\pi x}{4}$ par $\frac{\pi x}{4}$ qui en diffère infiniment peu.

Question II. — *Trouver l'ordre infinitésimal de* $z = x - \sqrt{x^2 + 2x}$.

x ne peut varier qu'au-dessous de -2 ou au-dessus de 0 : il n'y a donc lieu de le faire tendre vers 0 que par des valeurs positives. D'ailleurs,

$$\frac{z}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \sqrt{x + 2} ;$$

ainsi pour $x = 0$, $\frac{z}{\sqrt{x}}$ tend vers $-\sqrt{2}$. L'ordre infinitésimal cherché est $\frac{1}{2}$, et la partie principale de l'infiniment petit est $-\sqrt{x}\sqrt{2}$.

Question III. — *Soit un angle* O *et un point* C *extérieur : une droite* CAB *rencontre ses côtés en* A *et en* B. *Lorsqu'elle tourne autour de* C, *de manière que* A *et* B *se rapprochent simultanément de* O, *les longueurs* OA *et* OB *sont infiniment petites du même ordre.* (Houël, *Calcul infinitésimal.*)

En effet, le rapport $\frac{OA}{OB} = \frac{\sin OBA}{\sin OAB}$ a une limite finie et différente de zéro, puisque chacun des angles OBA et OAB a évidemment une limite finie et différente de zéro.

Question IV. — *Vraie valeur de* $\dfrac{1 - \sin\frac{\pi}{2}(1+x)}{x - \sqrt{x^2 + 2x}}$ *pour* $x = 0$.

1° Les deux termes de la fraction sont des infiniment petits. Substituons à ceux-ci leurs valeurs principales :

$$\frac{\pi^2 x^2}{8} : (-\sqrt{x}\sqrt{2});$$

le quotient tend vers 0, par des valeurs négatives. La fraction proposée a pour ordre infinitésimal $\frac{3}{2}$, sa valeur principale est $-\frac{\pi^2}{16}x^{\frac{3}{2}}$, et la vraie valeur cherchée est 0.

2° La règle de l'Hôpital donne ici

$$\frac{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}(1+x)}{1 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}},$$

qui, pour $x = 0$, se présente sous la forme $\frac{0}{\infty}$; x devenant nul par des valeurs positives, il est clair que le numérateur est positif, le dénominateur négatif, ce qui concorde bien avec le résultat précédent.

Question V. — Faux raisonnement des disciples de Pyrrhon.

Les disciples de Pyrrhon arrivaient à démontrer que deux circonférences de cercle concentriques sont égales, de la façon suivante :

On peut mener dans un des cercles un nombre de rayons assez grand pour le remplir en entier : ces rayons coupent la circonférence du cercle en un certain nombre de points. Or ils remplissent également le second cercle et coupent sa circonférence en un nombre égal de points. Les deux circonférences sont donc égales, étant formées d'un même nombre de points.

Il n'est pas surprenant qu'en se servant de raisonnements de même force, Sextus Empiricus ait pu établir qu'il n'y a ni corps, ni étendue, ni nombres, ni sons.

Rappelons en passant le fameux paralogisme qui consiste à établir qu'un côté d'un triangle, considéré comme limite de ligne brisée, est égal à la somme des deux autres, et qui fut jadis posé comme objection aux principes du calcul infinitésimal.

Question VI. — De la Cycloïde et de sa Compagne [1].

Soit un cercle de diamètre AB, qui roule sur la droite AC dont la longueur est la moité de la circonférence du cercle. Le point A du cercle engendre ainsi l'arc AD de cycloïde. Nous avons divisé la droite AC et la demi-circonférence AB en neuf parties égales, et nous avons obtenu autant de points de la cycloïde. En même temps, nous

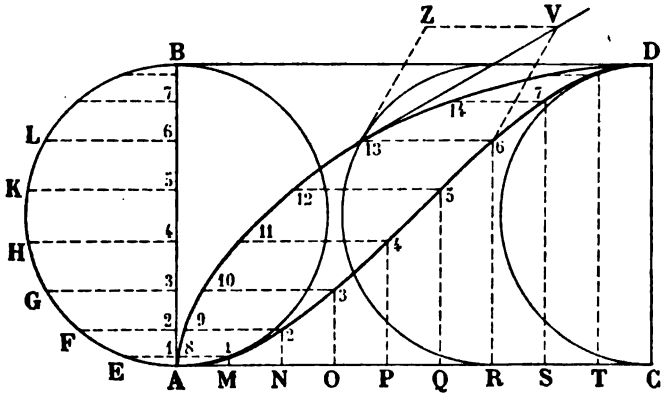


Figure extraite du « *Traité des Indivisibles* ».

avons pris les longueurs 8.1, 9.2, 10.3, ... égales respectivement à E.1, F.2, G.3, ... et nous avons obtenu neuf points de la courbe dite *compagne de la cycloïde.*

(1) De Roberval, *Traité des Indivisibles.*

Or, la considération des infiniment petits montre immédiatement que l'aire A.1.2..... D.14.13..... A est égale à celle du demi-cercle AB. D'autre part la compagne de la cycloïde divise évidemment le rectangle ACDB en deux parties égales, et ce rectangle, d'après Archimède, est équivalent au double du cercle AB. L'aire comprise entre la cycloïde AD et les droites AC et CD est donc les $\frac{3}{2}$ du cercle AB.

La tangente en 13 à la cycloïde a été obtenue de la manière suivante : la figure 13.6.V.Z est un losange ; et la droite 13.V est tangente en 13 au cercle figuré. Cette construction est facile à justifier, au moyen par exemple du principe de la composition des vitesses.

Remarque. — La tangente 13.V, la droite BD et le diamètre R6 sont trois droites concourantes, d'où une manière simple d'obtenir la tangente.

Question VII. — Théorie du planimètre.

1. Le planimètre est un instrument destiné à mesurer la surface comprise dans une courbe plane fermée. Il se compose essentiellement d'un compas AOB, dont la branche OB, prolongée suivant OR, porte à son extrémité une roue verticale. Considérons alors une courbe fermée : l'instrument étant placé dans le plan de la figure, A fixe, B décrivant le contour de l'aire, la roue R roulera d'une certaine quantité. Nous proposons de démontrer que cette quantité est proportionnelle à l'aire enserrée dans la courbe, lorsque B aura décrit la courbe entière.

2. Soient alors B et B′ deux points de la courbe (*fig.* 1), A le point fixe du planimètre, O son pivot, R et R′ les positions de la roue qui correspondent à B et à B′. Menons BB′, RR′, et aux milieux de ces droites élevons des perpendiculaires, qui se couperont en C. Les triangles RCB, R′C′B′ étant égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun, on voit que la figure R′CB′ se déduira de RCB en faisant tourner celle-ci, dans un sens convenable, d'un angle

$$BCB' = RCR' = d\varphi$$

autour de C, et on dira alors que C est le centre instantané de rotation de la figure RCB. Marquons le point O_1, qui correspond

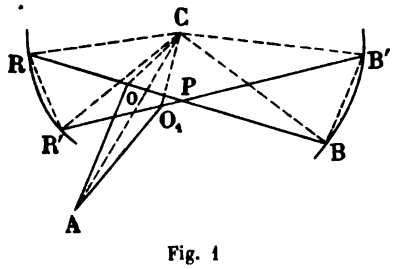


Fig. 1

à O : on a $OA = O_1A$ et $OC = O_1C$, donc AC est la bissectrice de l'angle OAO_1. Si maintenant on suppose que B′ tende vers B, et par suite R′ vers R, BC et RC tendront vers les normales aux courbes BB′ et RR′ en B et R ; AC, bissectrice de OAO_1, vers le rayon AO ; et P, point de rencontre de BR et B′R′, vers le pied de la perpendiculaire menée de C sur BR.

3. D'après cela, soient B et B′ (*fig.* 2) deux points infiniment voisins de la courbe, ABOR la position initiale du planimètre. Le centre instantané C sera le point d'intersection de AO avec la normale en B à la courbe BB′. Menons la droite CR : cette ligne sera la normale en R à la trajectoire du point R, et nous pourrons dire que le point R′ relatif à B′ sera sur la circonférence de centre P, de rayon PR ; ce point R′ sera de plus sur B′P (CP perpendiculaire à BR) : il sera donc parfaitement déterminé.

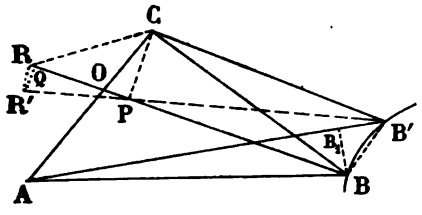


Fig. 2

Soient R′Q et B_1B des perpendiculaires à RB et AB′.

Posons $AB = \rho$, $B'AB = d\omega$, $\widehat{BB'} = ds$,

$\widehat{ACB} = C$, $\widehat{CAB} = A$, $\widehat{CBA} = B$, $\widehat{BCB'} = \widehat{BCR'} = d\varphi$,

et cherchons à calculer en fonction de ces quantités la ligne R′Q, qui, aux infiniment petits du second ordre près, représente le chemin décrit par R, ou la quantité dont la roue a tourné.

4. Or, dans le triangle B_1BB', on a

$$BB_1 = \rho d\omega, \qquad B_1B' = d\rho, \qquad BB' = ds,$$

(toujours aux infiniment petits du second ordre près). Mais les angles ABC et B_1BB' étant égaux (côtés perpendiculaires), on a, en évaluant B_1BB' de deux manières dans le triangle rectangle B_1BB',

$$B = \text{arc cos}\,\frac{\rho d\omega}{ds} = \text{arc sin}\,\frac{d\rho}{ds};$$

mais dans le triangle ABC,

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{\rho}{\sin C},$$

d'où

$$BC = \frac{\rho \sin A}{\sin C};$$

comme d'ailleurs

$$C = \pi - (A + B),$$

cette expression devient

$$BC = \frac{\rho \sin A}{\sin (A + B)} = \frac{\rho \sin A}{\sin A \cos B + \cos A \sin B},$$

ou enfin

$$(1) \qquad BC = \frac{\rho \sin A \, ds}{\rho d\omega \sin A + d\rho \cos A}.$$

Mais dans le triangle rectangle CBB′, on a

$$d\varphi = \frac{ds}{BC};$$

en comparant à (1),

$$(2) \qquad d\varphi = \frac{\rho \sin A \, d\omega + d\rho \cos A}{\rho \sin A}.$$

Ensuite, dans CBP,

$$BP = BC \cos CBP = BC \cos (A - B) = BC \left[\rho \frac{d\omega}{ds} \cos B + \frac{d\rho}{ds} \sin B\right],$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (1),

$$BP = \rho \sin A \frac{\rho d\omega \cos B + d\rho \sin B}{\rho d\omega \sin A + d\rho \cos A}.$$

Dans le triangle RCR′, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$R'Q = PRd\varphi = (l - BP)d\varphi,$$

l étant la longueur de la branche BR, ou en remplaçant BP par la valeur qu'on vient de trouver,

$$(3) \qquad R'Q = \left(l - \rho \sin A \frac{\rho d\omega \cos B + d\rho \sin B}{\rho d\omega \sin A + d\rho \cos A}\right) d\varphi.$$

Telle est donc, aux infiniment petits du second ordre près, l'expression du chemin décrit par la roue.

5. En particulier, si $d\rho = 0$, ou si B décrit le chemin BB_1, (3) donne

$$(R'Q)_{\rho=0} = (l - \rho \cos B)d\varphi,$$

ou, comme ici A est le centre instantané, $d\omega = d\varphi$, et

$$(4) \qquad (R'Q)_{\rho=0} = (l - \rho \cos B)d\omega.$$

Ensuite si $\omega = 0$, ou si le point B_1 décrit le chemin B_1B',

$$(5) \qquad (R'Q)_{\omega=0} = (l - \rho \operatorname{tg} A \sin B)d\varphi.$$

Démontrons qu'il existe la relation

$$(6) \qquad R'Q = (R'Q)_{\rho=0} + (R'Q)_{\omega=0},$$

c'est-à-dire que le chemin décrit par R, quand B parcourt l'arc BB′,

est égal à la somme des chemins décrits par ce même point R, quand B parcourt, successivement, BB_1 et B_1B'. En effet, la combinaison de (2) et (3) donne

$$(7) \qquad R'Q = l d\omega + \frac{l d\rho}{\rho} \operatorname{cotg} A - (\rho d\omega \cos B + d\rho \sin B);$$

de plus, d'après (5),

$$(R'Q)_{\omega=0} = (l - \rho \operatorname{tg} A \sin B)(d\varphi)_{\omega=0};$$

(2) donnant d'autre part

$$(d\varphi)_{\omega=0} = \frac{d\rho}{\rho} \operatorname{cotg} A,$$

il en résulte

$$(8) \qquad (R'Q)_{\omega=0} = \frac{l d\rho \operatorname{cotg} A}{\rho} - \sin B \, d\rho.$$

On a encore

$$(4) \qquad (R'Q)_{\rho=0} = (l - \rho \cos B) d\omega.$$

La comparaison de (7), (8) et (4) donne immédiatement la relation (6) que nous nous étions proposé de démontrer.

6. Considérons maintenant une courbe fermée S (*fig.* 3), que nous faisons décrire au point B. Représentons les deux rayons vecteurs infiniment voisins ABC et AB'C'; décrivons de plus, du point A comme centre, les arcs BB_1 et $C'C'_1$. (Le point B_1 de cette figure n'étant distant du point B_1 de la précédente que d'un infiniment petit du deuxième ordre, nous les regardons comme confondus). Que nous fassions décrire à B le chemin $BB_1C'CB$, ou que nous conduisions ce point suivant $BB_1B'C'C'_1B$, nous aurons pour la roue R le même déplacement. Car, d'après ce qui vient d'être dit, lorsque B parcourt respectivement BB' et C'C, le déplacement est le même pour R que si B parcourt BB_1B' et $C'C'_1C$. Les deux aires BB'C'C et $BB_1B'C'_1C$ différant entre elles par les triangles BB_1B' et $CC'C'_1$, il est clair d'après cela que la roue n'accusera pas les surfaces de ces deux triangles.

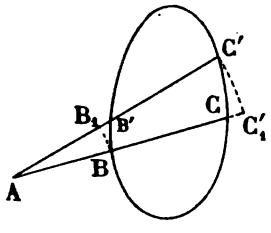


Fig. 3

Il n'y a pas à s'étonner de ce résultat : les aires BB_1B' et CC'_1C' sont infiniment petites du second ordre ; les négliger ici, revient à ce qu'on fait dans la théorie des intégrales, quand on veut évaluer en coordonnées polaires l'aire d'une courbe. Nous allons donc chercher le déplacement de R, quand B parcourt les quatre éléments BB_1, B_1C', $C'C'_1$ et C'_1B.

Tout d'abord il n'y a pas à s'occuper des déplacements qui correspondent à B_1C' d'une part, à C'_1B de l'autre, car le chemin C'_1B sera parcouru dans le sens BC'_1 quand on évaluera l'élément d'aire contigu à BC, et ce nouveau déplacement annulera le précédent. De même pour B_1C'.

Restent donc à obtenir les valeurs des déplacements de la roue qui correspondent à BB_1 et $C'C'_1$. Il suffit à cet effet d'appliquer la formule (4), ce qui donne, pour BB'_1,

$$\alpha_1 = (l - \rho_1 \cos B)d\omega,$$

ρ_1 étant le rayon AB. Mais ici le centre instantané (*fig.* 4) est en A, et le triangle APB est rectangle en P, ainsi

$$\rho_1 \cos B = BP.$$

Appelons a la longueur OA, b la longueur OB ; nous avons évidemment

$$(9) \qquad \rho_1 \cos B = BP = OB - OP = b - a \cos AOB.$$

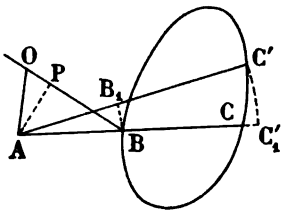


Fig. 4

Mais dans le triangle AOB,

$$\cos AOB = \frac{a^2 + b^2 - \rho_1^2}{2ab},$$

donc

$$\rho_1 \cos B = b - \frac{a^2 + b^2 - \rho_1^2}{2b},$$

et

$$(10) \qquad \alpha_1 = \left(l - b + \frac{a^2 + b^2 - \rho_1^2}{2b}\right)d\omega.$$

Si de même α_2 et ρ_2 sont pour $C'C'_1$ les quantités analogues à α_1 et ρ_1,

$$(11) \qquad \alpha_2 = \left(l - b + \frac{a^2 + b^2 - \rho_2^2}{2b}\right)d\omega.$$

Le déplacement total de la roue est donc, en remarquant que α_2 et α_1 doivent être affectés de signes différents,

$$\mu = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{1}{2b}(\rho_2^2 - \rho_1^2)d\omega,$$

et cette quantité μ est proportionnelle à l'aire de l'élément de la surface à évaluer.

7. Ainsi la longueur du chemin décrit par R, ou bien l'angle dont tourne la roue, est *rigoureusement* proportionnelle à l'aire que l'on veut évaluer. Dans la pratique, on opérera alors de la manière suivante :

On commencera par fixer l'extrémité A, qui sera munie d'une

pointe, en un point quelconque de la figure, mais de manière toutefois que dans ces conditions, les dimensions de l'instrument permettent à B de se mouvoir sur tout le pourtour de l'aire. On fera alors parcourir à B le périmètre d'une aire Σ dont on sache à l'avance l'expression (un carré par exemple) : la roue R tournera d'un certain nombre de tours et fractions de tours, soit $n+\frac{p}{q}$. Ensuite B parcourant le périmètre de l'aire inconnue S, R tournera d'un nombre $n'+\frac{p'}{q'}$ de tours et de fractions de tours, ce qui donnera la relation

$$\frac{S}{\Sigma}=\frac{n'+\frac{p'}{q'}}{n+\frac{p}{q}}.$$

On obtiendra donc, *mathématiquement*, la valeur de S.

On pourrait également graduer l'instrument, une fois pour toutes, en cherchant de cette manière la valeur de l'aire qui correspond à l'unité de division dont tourne la roue. Mais il est plus exact d'opérer chaque fois par comparaison avec une aire telle que Σ.

(Rédigé, avec l'aide de M. J. Favro, d'après la méthode indiquée par M. Flamme, à la Faculté des Sciences de Rennes, février 1889).

Question VIII. — « Du solide de la roulette ».

« Que AIB soit le chemin de la Roulette ; ALMB le parallélogramme fait du diamètre IC, et de la circonférence AB étendüe en ligne droite. Nous cherchons la raison qu'il y a du cylindre fait par le parallélogramme au solide fait par la roulette AIB lorsque le tout tourne sur

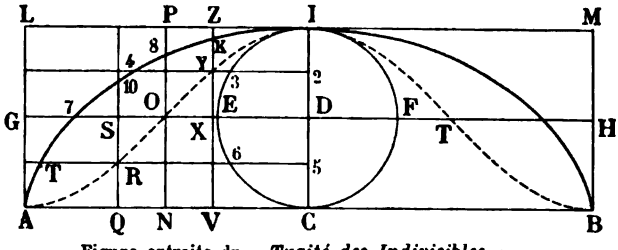


Figure extraite du « *Traité des Indivisibles* ».

ladite circonférence ACB. Pour cet effet, je tire la ligne GDH parallèle à ACB ; et cette ligne se prend pour le chemin du point D centre de la roulette. Or cette ligne GDH coupe la figure AOI4 et le demi-cercle CEI, cha-

cune en deux parties semblables : or il y a un Théorème qui porte que, quand deux figures sont ainsi coupées par une ligne parallèle à la ligne sur laquelle les figures font leur tour, les solides des figures sont entre eux comme les figures ; et partant le solide fait par la figure AOI4 est égal au solide fait par la demi-circonférence IEC ; car nous avons veû comme le plan AOI4 est égal au demi-cercle IEC que nous avons trouvé estre le quart du parallélogramme ; et ainsi ces solides seront chacun le quart du cylindre fait par le parallélogramme. Mais ne prenant que le seul solide fait par AOI4 qui sera le quart du cylindre, et ayant tiré la ligne QRS qui représente toutes les lignes tirées perpendiculairement de AN premier quart de la circonférence ACB sur GDH, et la ligne VXY qui représente toutes les lignes tirées de NC second quart, sur la ligne courbe OYI : nous disons que le quarré de QR est égal aux quarrez de QS et SR, moins deux fois le rectangle QSR, et ainsi des autres lignes tirées sur le second quart NC. Or les rectangles qui se trouvent dans l'espace AO sont égaux à ceux de l'espace NI ; et estant de plus d'un costé et moins de l'autre, on les ostera de part et d'autre. Il restera donc que les quarrez de QR, VY et des autres lignes tirées de AC sur la ligne courbe AROYI pris tous ensemble, seront égaux aux quarrez du demi-diamètre QS ou VX pris autant de fois, et aux quarrez de SR, XY, et aux autres lignes tirées de GD sur la ligne courbe AOI pris aussi autant de fois. Or lesdites lignes SR, XY,... sont des sinus droits dont les quarrez sont au quarré du diamètre pris autant de fois, comme 1 à 8, et les quarrez du demi-diamètre sont aux quarrez du diamètre, comme 2 à 8. Si on joint ces raisons, on aura celle de 3 à 8 qui est celle des quarrez des lignes tirées de AC sur la ligne courbe AOI au quarré du diamètre pris autant de fois, et si on y joint la raison de la figure AOI4 au parallélogramme AI, qui est comme 2 à 8, on aura la raison de 5 à 8, qui est celle du solide que fait la roulette AIB, au cylindre AM, le tout tournant sur ACB ».

(De Roberval, *Traité des Indivisibles*, p. 230.)

Question IX. — Note sur une question posée aux examens oraux de l'École Polytechnique par M. Picquet.

Trouver l'ordre infinitésimal de la somme

$$S = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{L}{x-l},$$

quand x devient infini, l'infiniment petit principal étant $\frac{1}{x}$. Trouver la

partie principale de cet infiniment petit et déterminer A, B, ..., L ; *a, b, ...,l de sorte qu'il soit de l'ordre le plus élevé possible.*

Nous supposerons qu'aucune des quantités A, B, ..., L ne soit nulle, et que toutes les quantités $a, b, \ldots, l$ soient distinctes. Posons

$$\frac{1}{x} = \varepsilon,$$

alors

$$\frac{A}{x-a} = \frac{A\varepsilon}{1-a\varepsilon} = A\varepsilon + Aa\varepsilon^2 + Aa^2\varepsilon^3 + \ldots$$

Nous voyons que l'ordre infinitésimal cherché est en général un, la partie principale de S étant

$$(A + B + \cdots + L)\varepsilon.$$

S sera infiniment petit du deuxième ordre si

$$A + B + \ldots + L = 0;$$

du troisième ordre si, en outre de cette dernière condition, nous avons

$$Aa + Bb + \ldots + Ll = 0,$$

et ainsi de suite.

Considérons alors le système des équations

$$(1) \qquad \begin{cases} Q_1 = A + B + \cdots + L = 0, \\ Q_2 = Aa + Bb + \cdots + Ll = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_p = Aa^{p-1} + Bb^{p-1} + \cdots + Ll^{p-1} = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons considérer ces équations comme linéaires et homogènes par rapport à A, B, ..., L ; il en résulte que nous pourrons assujettir ces m quantités A, B, ..., L à vérifier les $(m-1)$ premières. Mais dans celles-ci le déterminant des coefficients des inconnues (déterminant de Vandermonde) est différent de zéro ; ainsi il ne sera pas possible de vérifier plus de m relations, et S sera, au plus, d'ordre infinitésimal m.

Cela était évident *a priori* : en effet S se met sous la forme

$$S = \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

où φ est un polynome entier d'ordre $(m-1)$:

$$\varphi(x) = P_1x^{m-1} + P_2x^{m-2} + \cdots + P_{m-1}x + P_m,$$

et où $$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

et il est clair que S sera d'ordre infinitésimal 2, 3, 4, ..., m, suivant que le premier, les deux premiers, ..., les $(m-1)$ premiers des coefficients de $\varphi(x)$ seront nuls.

Soient alors les relations

$$(2)\qquad \begin{cases} P_1 = 0, \\ P_2 = 0, \\ \dots\dots \\ P_p = 0. \end{cases}$$

Elles expriment, comme les relations (1), les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'ordre infinitésimal de S soit $(p+1)$. Ces deux systèmes doivent donc être équivalents, ce que l'on constate en remarquant que

$$(3)\qquad \begin{cases} P_1 = Q_1, \\ P_2 = -Q_1\Sigma a + Q_2, \\ P_3 = Q_1\Sigma ab - Q_2\Sigma a + Q_3, \\ P_4 = -Q_1\Sigma abc + Q_2\Sigma ab - Q_3\Sigma a + Q_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Remarque I. — La première des relations (1), comparée à la première des relations (3), donne

$$P_1 = A + B + \dots + L,$$

ou, puisque

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)},$$

$$(4)\qquad P_1 = \sum \frac{\varphi(a)}{f'(a)}.$$

Remarque II. — Supposons que $\varphi(x)$ se réduise à une constante : toutes les relations (1) sont vérifiées jusqu'à $p = m-1$; mais ici

$$\varphi(a) = \varphi(b) = \dots = P_m;$$

ainsi ces relations se réduisent à

$$(5)\qquad \begin{cases} \sum \frac{1}{f'(a)} = 0, \\ \sum \frac{a}{f'(a)} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum \frac{a^{m-2}}{f'(a)} = 0. \end{cases}$$

REMARQUE III. — Des relations (4) et (5) on déduit aisément

$$\sum \frac{a^{m-1}}{f'(a)} = 1.$$

(*Revue de Mathématiques Spéciales*, janvier 1894.)

Question X. — *L'idée de limite et la compensation des erreurs dans les équations imparfaites, d'après les ouvrages de* LEIBNIZ, CARNOT *et* DE FREYCINET.

Dès 1684, Leibniz écrit ce qui suit[1] :

« Sentio autem et hanc et alias (methodos) hactenus adhibitas, omnes deduci posse ex generali quodam meo dimetiendorum curvilineorum principio, *quod figura curvilinea censenda sit æquipollere polygono infinitorum laterum;* unde sequitur, quicquod de tali polygono demonstrari potest, sive ita, ut nullus habeatur ad numerum laterum respectus, sive ita, ut tanto magis verificetur, quantò major sumitur laterum numerus, ita, ut error tandem fiat quovis dato minor, id de curva posse pronuntiari ».

Ce passage remarquable, cité par Lacroix, Poisson, etc., prouve bien que Leibniz ne considère pas une courbe comme étant réellement un polygone d'un nombre infini de côtés. Il estime seulement qu'en la regardant comme telle, on sera conduit à des résultats exacts.

Leibniz compare ailleurs le calcul différentiel à la méthode d'exhaustion des Anciens[2] :

« Quand il y a plusieurs degrés d'infinis ou infiniment petits, c'est comme le globe de la terre est estimé un point à l'égard de la distance des fixes ; et une boule que nous manions est encore un point en comparaison du semi-diamètre du globe de la terre ; de sorte que la distance des fixes est infiniment infinie, ou infinie du second ordre, par rapport au diamètre de la boule ; car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée : de sorte qu'on ne diffère du style d'Archimède que dans les expressions, qui sont plus directes dans notre méthode et plus conformes à l'art d'inventer. »

En somme on doit à Leibniz ce principe, admis ensuite presque comme un axiome : *des quantités finies qui ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite peuvent se substituer l'une à l'autre en toutes circonstances.* Mais il y a lieu de se demander si en agissant ainsi on procède par approximation ou bien si on arrive quand même à des résultats rigoureusement exacts.

---

(1) *Acta eruditorum*, année 1684, p. 585.
(2) *Journal de Trévoux*, 1701. Ce passage est cité par GUILLOUD, 1836, etc.

Dans un petit livre publié dans les dernières années du XVIIIe siècle [1], Carnot recherche l'origine que peut avoir eue l'analyse infinitésimale : « *On a dû naturellement la regarder d'abord comme une simple méthode d'approximation* », dit-il, et il l'explique de la façon suivante :

« La difficulté qu'on rencontre souvent à exprimer exactement par des équations les différentes conditions d'un problème, et à résoudre ces équations, a pu faire naître les premières idées du calcul infinitésimal. Lorsqu'il est trop difficile, en effet, de trouver la solution exacte d'une question, il est naturel de chercher au moins à en approcher le plus qu'il est possible, en négligeant les quantités qui embarrassent les combinaisons, si l'on prévoit que ces quantités négligées ne peuvent, à cause de leur peu de valeur, produire qu'une erreur légère dans le résultat du calcul. C'est ainsi, par exemple, que ne pouvant découvrir qu'avec peine les propriétés des courbes, on aura imaginé de les regarder comme des polygones d'un grand nombre de côtés. En effet, si l'on conçoit, par exemple, un polygone régulier inscrit dans un cercle, il est visible que ces deux figures, quoique toujours différentes et ne pouvant jamais devenir identiques, se ressemblent cependant de plus en plus à mesure que le nombre des côtés du polygone augmente, que leurs périmètres, leurs surfaces, les solides formés par leurs révolutions autour d'un axe donné, les lignes analogues menées au dedans ou au dehors de ces figures, les angles formés par ces lignes, etc., sont, si non respectivement égaux, au moins plus approchans de l'égalité que ce nombre de côtés devient plus grand ; d'où il suit qu'en supposant ce nombre de côtés très grand en effet, on pourra sans erreur sensible attribuer au cercle circonscrit les propriétés qu'on aura trouvées appartenir au polygone inscrit.

« En outre, chacun des côtés de ce polygone diminue évidemment de grandeur à mesure que le nombre de ces côtés augmente ; et par conséquent, si l'on suppose que le polygone soit réellement composé d'un très grand nombre de côtés, on pourra dire aussi que chacun d'eux est réellement très petit.

« Cela posé, s'il se trouvoit par hasard dans le cours d'un calcul une circonstance particulière où l'on pût simplifier beaucoup les opérations en négligeant, par exemple, un de ces petits côtés par comparaison à une ligne donnée, c'est-à-dire, en employant dans le calcul cette ligne donnée au lieu d'une quantité qui seroit égale à la somme faite de cette ligne et du petit côté en question, il est clair qu'on pourroit le faire sans inconvénient, car l'erreur qui en résulteroit ne pourroit être qu'extrêmement petite et ne mériteroit pas qu'on se mît en peine pour en connoître la valeur ». (p. 7 à 9).

Carnot dit en second lieu ceci : « *On a découvert ensuite que malgré les erreurs commises dans l'expression des conditions de chaque problème, les résultats étoient néanmoins de la plus parfaite exactitude* ». A l'appui de cette thèse il traite un problème simple (mener par un point d'un

---

(1) *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, par le citoyen CARNOT, Membre de l'Institut national, Paris, An V.

Cette édition de 1797 est sans doute la seconde. Les passages cités par M. de Freycinet appartiennent à la quatrième, que nous n'avons pu nous procurer.

cercle la tangente à ce cercle), et malgré qu'il néglige certaines quantités, il arrive à un résultat évidemment juste. Qu'en conclure, sinon que les erreurs se sont compensées d'elles-mêmes, que les quantités qui causaient ces inexactitudes se sont éliminées ? Et pourquoi cela s'est-il produit, quelles précautions est-il nécessaire de prendre ? Ne pouvant reproduire la discussion si remarquable que fait Carnot de son problème, nous nous bornons à citer les réflexions suivantes :

« L'inventeur a donc pu être conduit à sa découverte par un raisonnement bien simple : si à la place d'une quantité proposée, a-t-il pu dire, j'emploie dans le calcul une autre quantité qui ne lui soit point égale, il en résultera une erreur quelconque; mais si la différence des quantités employées l'une pour l'autre est arbitraire et que je sois maître de la rendre aussi petite que je voudrai, cette erreur ne sera point dangereuse; je pourrois même commettre à la fois plusieurs erreurs semblables sans qu'il s'ensuivît aucun inconvénient, puisque je demeurerai toujours maître du degré de précision que je voudrai donner à mes résultats. Il y a plus encore ; c'est qu'il pourroit arriver que ces erreurs se compensassent mutuellement, et qu'ainsi mes résultats devinssent parfaitement exacts. Mais comment opérer cette compensation et dans tous les cas? C'est ce qu'un peu de réflexion aura pu faire découvrir. En effet, aura pu dire l'inventeur, supposons pour un instant que la compensation désirée ait lieu, et voyons par quel signe elle doit se manifester dans le résultat du calcul. Or, ce qui doit naturellement arriver, c'est que les quantités qui occasionnoient ces erreurs ayant disparu, les erreurs aient disparu de même ; car ces quantités ayant par hypothèse des valeurs arbitraires, elles ne doivent plus entrer dans des formules ou résultats qui ne le sont pas, et qui étant devenus exacts par supposition, dépendent uniquement, non de la volonté du calculateur, mais de la nature des choses dont on s'étoit proposé de trouver la relation exprimée par ces résultats. Donc le signe qui annonce que la compensation désirée a lieu est l'absence des quantités arbitraires qui produisoient ces erreurs ; et partant, il ne s'agit, pour opérer cette compensation, que d'éliminer ces quantités arbitraires ». (p. 18 à 20).

Voici enfin la magnifique conclusion de l'ouvrage de Carnot :

« En vain les adversaires de l'analyse infinitésimale diront-ils que c'est ruiner la certitude des mathématiques que d'y admettre des erreurs, comme on le fait, en employant des équations imparfaites; ces erreurs peuvent-elles avoir des conséquences dangereuses, puisqu'on a des moyens infaillibles pour les faire disparoître, et des signes certains pour connoître lorsqu'elles ont disparu ? Renoncera-t-on aux avantages immenses que procure ce calcul, de peur de s'écarter un instant des procédés rigoureux de la géométrie élémentaire, ou préférera-t-on à la route unie et facile par laquelle cette analyse nous mène aux découvertes, un sentier épineux où il est si difficile de ne point s'égarer? Tel est celui qu'offre la méthode des limites lorsqu'on veut l'employer exclusivement. Car ceux qui veulent proscrire la notion des quantités infinitésimales sont réduits, ou à la suppléer par l'algèbre commune, ce

qui présente des difficultés sans nombre, ou à se servir continuellement des noms d'infini et d'infiniment petit en même temps qu'ils les dénigrent, si l'on peut s'exprimer ainsi, et qu'ils traitent de chimères l'existence des choses-mêmes dont ils sont les hiéroglyphes. On n'emploie, dit-on, ces termes que figurément; mais je demande si un langage figuré et abstrus est celui qui convient à la simplicité des mathématiques, et sur-tout à cette rigueur dont on veut s'étayer pour condamner la théorie de l'infini. Ces deux méthodes ne reviennent-elles pas au même, ou plutôt ne sont-elles pas la même méthode employée diversement? En un mot, ne sont-ce pas toujours les mêmes idées à rendre, les mêmes relations à exprimer? Pourquoi donc ne pas rendre ces idées, ne pas exprimer ces relations de la manière la plus claire et la plus simple? » (p. 77-78).

Les théorèmes concernant la substitution des infiniment petits les uns aux autres, dans les limites de sommes ou de rapports, sont démontrés partout. Nous allons donner leurs énoncés, d'après M. de Freycinet[1], à cause de leur parfaite clarté :

Première proposition. — « *Deux quantités fixes, entre lesquelles on suppose qu'il n'existe qu'une différence infiniment petite, n'ont réellement pas de différence, et sont rigoureusement égales* ».

. . . . . .

«On se fait souvent de ce théorème une idée très fausse qui tient à l'énoncé sous lequel on le présente. On dit simplement que *deux quantités dont la différence est infiniment petite sont égales*; et le souvenir qu'on garde de cette proposition, c'est que la différence est comme négligeable par rapport aux quantités elles-mêmes. On y voit une sorte d'approximation, suffisante et au-delà pour nos besoins, plutôt qu'*une vérité absolue*. C'est pourtant à ce dernier point de vue qu'on doit l'envisager, puisque la différence supposée n'est ni extrêmement petite ni infiniment petite, mais bien rigoureusement nulle, ou pour mieux dire n'existe que dans de fausses apparences ».

Deuxième proposition. — « *Deux quantités finies variables qui ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite, convergent vers la même limite* ».

. . . . . .

« On peut dire aussi que le rapport des deux variables entre elles tend vers l'unité à mesure que ces variables convergent vers leurs limites ».

Conséquences. — « Si deux infiniment petits du premier ordre ne diffèrent que d'un infiniment petit d'ordre supérieur, leurs rapports avec l'infiniment petit principal convergent vers la même limite ».

. . . . . .

« Ce que nous disons là des rapports avec l'infiniment petit principal s'applique aussi bien aux rapports avec un infiniment petit quelconque du même ordre; car ces derniers rapports convergent également vers des limites finies.

« La même conséquence peut s'étendre à deux infiniment petits d'ordre

(1) *De l'Analyse infinitésimale. Étude sur la Métaphysique du Haut calcul*, par M. Charles de Freycinet, 1860.

quelconque, qui ne différeraient que d'un infiniment petit d'ordre supérieur, et dont on prendrait le rapport avec un troisième infiniment petit du même ordre.

« On peut énoncer ces conséquences autrement, en disant que le rapport de deux infiniment petits, dont la différence est d'un ordre supérieur, a pour limite l'unité.

« De ce qui précède résulte encore ceci :

« Toutes les fois qu'on se propose de passer aux limites de deux variables finies, ou aux limites des rapports d'infiniment petits d'un même ordre, on a toujours le droit de supprimer l'infiniment petit d'ordre supérieur qui représente la différence, parce que son influence disparaît nécessairement quand on passe aux limites des variables ou des rapports. En un mot, bien que les variables ou les rapports aient entre eux des différences certaines, on peut toujours agir comme si l'égalité parfaite avait lieu, à la condition, je le répète, qu'on se propose de passer aux limites de ces quantités ».

Troisième proposition. — *Si l'on a deux sommes d'infiniment petits d'un certain ordre, convergeant chacune vers une limite finie, et telles que les infiniment petits de l'une ne diffèrent respectivement des infiniment petits de l'autre que de quantités infiniment petites d'ordre supérieur, les limites de ces deux sommes sont nécessairement égales.* »

. . . . . .

« Dans les calculs où se présenteraient effectivement des sommes telles que nous venons de les supposer, on pourrait supprimer immédiatement les infiniment petits de l'ordre supérieur, — à la condition, bien entendu, qu'on se propose de passer aux limites de ces sommes ; — car l'erreur qu'on introduit dans les équations en faisant disparaître un de leurs éléments, cesse d'avoir aucune influence quand on passe aux limites elles-mêmes ».

Quatrième proposition. — Principe de substitution des quantités infinitésimales. — « *Dans toutes les questions où l'on cherche la limite d'un rapport ou la limite d'une somme d'infiniment petits, on peut, sans altérer la valeur des limites, remplacer chaque infiniment petit par un autre qui n'en diffère que par un infiniment petit d'ordre supérieur, ou dont le rapport avec le précédent converge vers l'unité* ».

Conséquences. — « Toutes les fois que, dans une équation, figure un rapport ou une somme d'infiniment petits, et qu'on se propose d'en prendre la limite ultérieurement, on peut, sans attendre jusqu'à ce moment, faire immédiatement les substitutions dont nous venons de parler ; car l'erreur ainsi commise sera passagère et perdra son influence lorsqu'on passera aux limites elles-mêmes.

« La valeur d'une fonction dérivée ou d'une fonction intégrale n'est pas changée quand on fait subir aux infiniment petits qui entrent dans leur expression les modifications que nous venons d'indiquer, car ces fonctions représentent précisément les valeurs des limites de rapport ou de limite de somme de ces infiniment petits ». (p. 154-160).

Tout serait à citer dans le dernier chapitre de l'ouvrage de M. de

Freycinet. Nous choisissons dans cette étude magistrale les considérations les plus propres à faire ressortir la liaison des idées avec celles des auteurs dont nous venons de donner des extraits.

« Une des manières les plus commodes de faire usage du principe de la substitution, consiste à *assimiler* les infiniment petits pouvant être substitués l'un à l'autre : de telle sorte que sans montrer chaque fois, dans le cours des raisonnements, qu'on se borne à des applications légitimes de ce principe, on accepte d'avance comme valables les relations obtenues à l'aide des infiniment petits plus simples auxquels les autres ont été assimilés. Mais si une pareille marche est souvent plus rapide, il faut se garder de croire qu'elle soit, quant au fond, distincte de la précédente, et qu'on puisse l'en rendre indépendante.

« Lorsque Leibniz fit connaître sa nouvelle analyse, il la présenta à peu près sous la forme de la méthode d'assimilation. Ainsi, les courbes étaient considérées par lui comme des polygones d'un nombre infini de côtés infiniment petits, les mouvements variés comme une succession de mouvements uniformes, les surfaces courbes comme des polyèdres, etc. En un mot, les quantités étaient, pour ainsi dire, décomposées en *éléments* d'une nature plus simple, dont, par conséquent, les relations devaient être plus faciles à saisir. Cette méthode de décomposition était d'ailleurs basée, comme elle doit l'être, sur le principe de la substitution des quantités. Mais ce principe était plutôt affirmé que démontré ; et l'on n'indiquait pas la cause véritable de sa rigueur, qui provient de ce que la quantité qu'il s'agit, en dernier ressort, de calculer, est une *limite*, c'est-à-dire une quantité fixe, dont la valeur ne peut être influencée par les altérations infiniment petites des divers termes qui y figurent. Il est permis de croire que l'illustre inventeur lui-même ne s'en rendait pas un compte parfaitement exact; car pressé par les objections qui lui venaient de divers côtés, il répondait qu'il traitait les infiniment petits comme des *incomparables* et qu'il les négligeait vis à vis des quantités finies *comme des grains de sable par rapport à la mer*. Aussi ne doit-on pas s'étonner des controverses qui s'engagèrent pendant longtemps sur cette question, et qui contribuèrent sans doute à retarder, par les opinions extrêmes qu'elles firent naître, l'établissement des bases véritables de l'analyse.

« Parmi les géomètres, les uns, fidèles à l'idée première de Leibniz, conservèrent sa méthode et cherchèrent à en éclairer les principes pour la mettre à l'abri de toute attaque. Ce qui a manqué à cette élaboration, c'est de fonder le principe de la substitution des quantités sur la considération des limites. Le dernier terme des efforts tentés dans ce sens, a abouti à l'œuvre si connue de Carnot : *Réflexions sur la métaphysique du Calcul infinitésimal*. Cet écrit, remarquable à plus d'un titre, a fait véritablement époque dans l'histoire de l'analyse : aussi mérite-t-il une mention toute spéciale.

« Carnot fonde la rigueur de la méthode leibnizienne sur une conception très ingénieuse, généralement connue sous le nom de *principe de la compensation des erreurs*. Son argumentation repose essentiellement sur ce que les erreurs, s'il y en avait dans le résultat final, seraient nécessairement de même nature que les quantités infiniment petites qui les ont engendrées. Or,

ces quantités disparaissant toujours par le fait même de la différentiation ou de l'intégration, il n'en subsiste aucune trace dans les équations finales. Celles-ci sont donc nécessairement et rigoureusement exactes.

« Une telle démonstration, quoique vraie au fond, n'est pas satisfaisante pour l'esprit, car elle semble confondre le *signe* de l'effet avec la *cause* elle-même. On voit bien que si les quantités infiniment petites ont disparu, le résultat ne peut être erroné, mais on ne voit pas *pourquoi* ces infiniment petits disparaissent inévitablement, et pourquoi en les supprimant on rétablit l'exactitude des relations.

« C'est le point qu'éclaire supérieurement la considération des limites ; car s'il est vrai que la limite d'un rapport ou d'une somme d'infiniment petits n'est pas altérée par la présence d'infiniment petits d'ordres supérieurs, on aperçoit très nettement que le résultat final, qui n'est autre que la valeur même de la limite, ne saurait en garder de trace, et que dès lors il est indifférent de conserver momentanément ou de supprimer tout de suite ces infiniment petits inutiles, destinés, malgré qu'on en ait, à disparaître des relations dernières.

« Les équations appelées *imparfaites* par Carnot sont donc, à proprement parler, des équations d'*attente* ou de *transition*, qui sont rigoureuses *en tant qu'on ne les fera servir qu'au calcul des limites*, et qui seraient, au contraire, absolument inexactes, si les limites ne devaient pas être prises effectivement. Il suffit d'avoir présente à l'esprit la destination définitive des calculs, pour n'éprouver aucune incertitude sur la valeur des relations par lesquelles on passe : il faut voir dans chacune d'elles, non pas ce qu'elle paraît exprimer actuellement, mais ce qu'elle exprimera plus tard, quand on prendra les limites ». (p. 239 à 243).

QUESTIONS PROPOSÉES

1. Trouver la limite de la somme

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots$$

où n est entier et positif, et augmente indéfiniment

2. Ordre infinitésimal de

$$\frac{x-A\sin x-Bx^2}{x^3}.$$

3. Déterminer A de manière que l'expression

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{A}{x-3\pi}$$

reste finie pour $x=3\pi$.

4. Valeur principale de $\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$.

5. Valeur principale de $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{x}{6}$.

6. Valeur principale de $\frac{\frac{x}{2}(e^x + 1)}{e^x - 1} - 1$.

7. Peut-on déterminer α de manière que l'expression $\frac{\frac{x}{2}(e^x + 1)}{e^x - 1} - \alpha$ soit infiniment petite pour $x = 0$?

8. Valeur principale de

$$\gamma \sin x - \alpha x + \beta (\cos x - 1).$$

9. L'expression

$$\varphi(x + 2h) - 2\varphi(x + h) + \varphi(x),$$

où h est infiniment petit du premier ordre, est infiniment petite du second ordre.

10. Ordre infinitésimal de

$$y = l(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

11. Un prisme oblique est équivalent à un prisme droit ayant une base égale et même hauteur.

12. Trouver le volume de la pyramide, celui du prisme étant connu.

13. Volume de l'hémisphère, étant donné celui du cylindre.

14. Une courbe étant rapportée à des coordonnées polaires, déterminer la tangente trigonométrique de l'angle V que fait la tangente en un point de la courbe avec le rayon vecteur de ce point.

Opérer directement au moyen des infiniment petits, ou bien partir de ce qu'en coordonnées cartésiennes on a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$, α étant l'angle avec Ox de la tangente à la courbe.

15. Une courbe étant déterminée par une relation

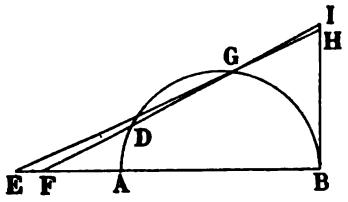
$$f(r, r') = 0$$

entre les distances d'un de ses points M à deux centres fixes, démontrer que la tangente en M est définie par la relation

$$dr \cos \theta' = dr' \cos \theta,$$

θ et θ' étant les angles que fait cette tangente avec les deux rayons vecteurs correspondants. — Cas de l'ellipse ou de l'hyperbole.

16. Soit un demi-cercle AB; par le point G on mène deux droites IGDF, HGE, telles que



$$AE = DF = \frac{AB}{2},$$

BHI étant la tangente en B; démontrer que

$$BH < \text{arc}\, BG < BI.$$

(Remarque faite pour simplifier le calcul de π par Snellius, qui employait un polygone de $1.073.741.824 = 2^{30}$ côtés, en 1621.)

17. Le nombre π est inférieur à $\frac{22}{7}$.

Employer la marche suivante, que nous résumons d'après la traduction latine donnée en 1676 par Wallis [1] de l'ouvrage d'Archimède :

On prend un cercle de centre ε, de rayon $\varepsilon\gamma$, et un angle $\gamma\varepsilon\xi$ égal à un tiers de droit. Cette ligne $\varepsilon\gamma$ coupe la tangente en γ au point ξ. On mène la bissectrice de l'angle $\gamma\varepsilon\xi$, qui coupe $\gamma\xi$ en η, la bissectrice de $\gamma\varepsilon\theta$, qui coupe $\gamma\xi$ en χ, enfin la bissectrice de $\gamma\varepsilon\chi$, qui coupe $\gamma\xi$ en λ.

On remarque d'abord que $\frac{\varepsilon\xi}{\xi\gamma} = \frac{1}{2}$, et que

$$\frac{\varepsilon\gamma}{\gamma\xi} > \frac{265}{153}. \quad \text{(Théorème du carré de l'hypoténuse.)}$$

Ensuite, de

$$\frac{\gamma\varepsilon}{\gamma\eta} = \frac{\varepsilon\xi}{\eta\xi}, \quad \text{(Euclide, livre VI, th. III.)}$$

on déduit

$$\frac{\gamma\varepsilon}{\gamma\eta} > \frac{571}{153},$$

d'où on tire

$$\frac{\varepsilon\eta}{\eta\gamma} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}. \quad \text{(Théorème du carré de l'hypoténuse.)}$$

Enfin on calcule successivement des limites inférieures des rapports suivants :

$$\frac{\varepsilon\gamma}{\gamma\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\theta\varepsilon}{\theta\gamma},$$

$$\frac{\varepsilon\gamma}{\gamma\chi} \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon\chi}{\gamma\chi},$$

et

$$\frac{\varepsilon\gamma}{\lambda\gamma},$$

et on en déduit une limite supérieure du rapport au diamètre du périmètre du polygone régulier circonscrit de 96 côtés.

18. Un système d'hyperboles équilatères concentriques est coupé par un autre système de même nature sous un angle constant, double de celui que font les axes des deux systèmes.

19. Toutes les paraboles ayant le même foyer et le même axe sont coupées

---

[1] *Archimedis Syracusani Arenarius, et Dimensio Circuli. Eutocii Ascalonitæ, in hanc Commentarius.* Cum Versione et Notis Joh. Wallis.

Propositio III. — Cujuslibet Circuli Ambitus, Diametri triplum superat, excessu, qui Minor est Diametri parte Septima, Major autem ejusdem Decem Septuagesimis primis.

par des paraboles de même foyer, mais d'axe différent, sous un angle moitié de celui que font les axes des deux systèmes de courbes.

(Ces deux théorèmes sont des conséquences d'une remarque générale de W. Roberts. Voyez Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 88.)

20. Lorsqu'une courbe quelconque roule sur une de ses tangentes, la longueur de la roulette engendrée par un point du plan lié invariablement à cette courbe est égale à la portion correspondante de la ligne, lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de ce même point sur les tangentes à la courbe mobile.

(Théorème de Steiner. Voyez Bertrand, *Calcul intégral*, p. 372.)

21. Application du théorème de Steiner : La longueur totale de la cardioïde est égale à celle de la cycloïde engendrée par un point du cercle considéré lorsque celui-ci roule sur une de ses tangentes.

Si un arc de courbe roule sans glissement, d'abord sur la convexité, puis dans la concavité d'une autre courbe, de sorte que, dans ces deux roulements, les mêmes points de la courbe mobile soient successivement en contact avec les mêmes points de la courbe fixe :

22. 1° La somme ou la différence des deux arcs décrits par un point quelconque du plan de la courbe mobile sera indépendante de la nature de la courbe fixe : — la somme, si le rayon de courbure de la courbe fixe est, en chacun des points de contact, plus grand que celui de la courbe mobile ; la différence, dans le cas contraire ;

23. 2° Si on considère, dans chacun de ces deux roulements, l'aire du quadrilatère mixtiligne limité par l'arc de la courbe fixe, l'arc de la roulette décrite et les deux lignes droites qui joignent les premières et dernières extrémités de ces arcs, la somme des deux quadrilatères sera une quantité constante, c'est-à-dire indépendante de la nature de la courbe fixe. (Au lieu de la somme entendez la différence, dans la même circonstance que ci-dessus).

(*Nouvelles Annales.*)

24. Déterminer la tangente au point M de la courbe décrite par le sommet d'un angle constant dont les deux côtés restent tangents à deux courbes données aux points M_1 et M_2.

La tangente cherchée est la perpendiculaire à la droite qui joint M au point de rencontre des normales en M_1 et M_2.

CHAPITRE IV

CALCUL DES DÉRIVÉES ET DES DIFFÉRENTIELLES

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — *On donne l'équation*

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

On considère A_1 *comme variable, tous les autres coefficients étant constants, de sorte que chaque racine de cette équation est une fonction implicite de* A_1 *: trouver les dérivées des racines par rapport à* A_1. *Partant de là et supposant variable successivement chacun des coefficients suivant les besoins qu'on en aura, on propose d'établir les relations suivantes :*

$$\frac{x_1^{m-1}}{f'(x_1)} + \frac{x_2^{m-1}}{f'(x_2)} + \cdots + \frac{x_m^{m-1}}{f'(x_m)} = 1$$

($x_1, x_2, \ldots, x_m$ *désignant les* m *racines supposées distinctes*),

$$\frac{x_1^{m-2}}{f'(x_1)} + \frac{x_2^{m-2}}{f'(x_2)} + \cdots + \frac{x_m^{m-2}}{f'(x_m)} = 0,$$

. . . . . .

et en général

$$\frac{x_1^{m-p}}{f'(x_1)} + \frac{x_2^{m-p}}{f'(x_2)} + \cdots + \frac{x_m^{m-p}}{f'(x_m)} = 0.$$

$$(p \geqslant 2)$$

On pose $\varphi(x) = Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \cdots$; *on demande de prouver que l'on a*

$$\frac{\varphi(x_1)}{f'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{f'(x_2)} + \cdots + \frac{\varphi(x_m)}{f'(x_m)} = P.$$

1° Supposons A_1 seul variable. Soit x la dérivée de x_1 par rapport à

A_1 : d'après la règle de dérivation des fonctions implicites,

$$x'_1 = -\frac{f'_{A_1}(x_1)}{f'_{x_1}(x^1)} = -\frac{x_1^{m-1}}{f'(x_1)}.$$

2° Cela posé, on a la relation

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = -A_1,$$

d'où
$$x'_1 + x_2 + \cdots + x'_m = -1,$$

c'est-à-dire
$$\sum \frac{x_1^{m-1}}{f'(x_1)} = 1.$$

Supposons maintenant A_2 seul variable. Nous aurons

$$x'_1 = -\frac{x_1^{m-2}}{f'(x_1)}.$$

Dans la relation $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = -A_1$, prenons les dérivées des deux membres par rapport à A_2 :

$$x' + x'_2 + \cdots + x'_m = 0,$$

c'est-à-dire
$$\sum \frac{x_1^{m-2}}{f'(x_1)} = 0.$$

En général, supposons A_p seul variable $(p \geqslant 2)$.

Comme précédemment,

$$x'_1 = -\frac{x_1^{m-p}}{f'(x_1)},$$

d'où
$$\sum \frac{x_1^{m-p}}{f'(x_1)} = 0.$$

3° Reprenons les relations que nous venons d'établir : multiplions les deux membres de la première par P, de la deuxième par Q, de la troisième par R, ... Nous avons ainsi le système

$$\sum \frac{Px_1^{m-1}}{f'(x_1)} = P,$$

$$\sum \frac{Qx_1^{m-2}}{f'(x_1)} = 0,$$

$$\sum \frac{Rx_1^{m-3}}{f'(x_1)} = 0.$$

. . . . . .

Additionnant, et réunissant entre eux les termes en $\frac{1}{f'(x_1)}$, $\frac{1}{f'(x_2)}$, ...,

$$\sum \frac{Px_1^{m-1} + Qx_1^{m-2} + Rx_1^{m-3} + \cdots}{f'(x_1)} = P,$$

ou
$$\sum \frac{\varphi(x_1)}{f'(x_1)} = P.$$

Question II. — *On considère la série dite hypergéométrique de Gauss ou des quatre éléments*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\ \gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n + \cdots$$

et on demande de trouver l'équation différentielle à laquelle satisfait cette fonction de x.

Soit la fonction $\Phi(x)$ définie par la relation

$$(1) \qquad \Phi(x) = F + (Bx + c)\frac{\partial F}{\partial x} + x(Dx + E)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

S'il est possible de déterminer B, C, D, E de telle sorte qu'on ait identiquement $\Phi(x) = 0$, l'équation $\Phi(x) = 0$ sera l'équation cherchée.

Or, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} + 2\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\ldots\gamma(\gamma+1)} + \cdots$$
$$+ n\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^{n-1} + \cdots$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\ldots\gamma(\gamma+1)} + \cdots$$
$$+ n(n-1)\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^{n-2} + \cdots$$

Dans (1), égalons à 0 le coefficient de x^n :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}[1 + Bn + Dn(n-1)]\\ + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)\beta\ldots(\beta+n)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}(C + nE)\end{aligned}\right\} = 0,$$

ou bien

$$(2) \quad [1 + (B - D)n + Dn^2](\gamma + n) + (\alpha + n)(\beta + n)(C + nE) = 0.$$

Si nous voulons que cette relation ait lieu quel que soit n, il faudra simultanément

$$\left.\begin{aligned}(3) \qquad & D + E = 0,\\ (4) \qquad & D(\gamma - 1) + B + (\alpha + \beta)E + C = 0,\\ (5) \qquad & 1 + (B - D)\gamma + C(\alpha + \beta) + \alpha\beta E = 0,\\ (6) \qquad & \gamma + \alpha\beta C = 0.\end{aligned}\right\}$$

(6) donne immédiatement

(6 *bis*) $$C = -\frac{\gamma}{\alpha\beta}.$$

Portant cette valeur dans (4) et (5), y remplaçant de plus D par $-E$, d'après (3), il vient

$$\left.\begin{aligned} &(4\ bis) \qquad B + (\alpha + \beta - \gamma + 1)E - \frac{\gamma}{\alpha\beta} = 0, \\ &(5\ bis) \qquad B\gamma + (\alpha\beta + \gamma)E + 1 - \frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Éliminant B entre ces équations (4 *bis*) et 5 (*bis*), on a

(7) $$E = -\frac{1}{\alpha\beta},$$

et portant dans (4 *bis*) cette valeur de E,

(8) $$B = \frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha\beta};$$

d'ailleurs

(9) $$D = -E = \frac{1}{\alpha\beta}.$$

B, C, D, E étant déterminés ainsi par les formules (6 *bis*), (7), (8) et (9), le coefficient de x^n est nul quel que soit x, autrement dit, tous les coefficients sont nuls dans cette fonction.

Ainsi l'équation différentielle cherchée est

$$F + \frac{(\alpha + \beta + 1)x - \gamma}{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial x} + x\,\frac{x - 1}{\alpha\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

Question III. — *Trouver les dérivées successives de*

(1) $$y = \cos(n \text{ arc cos } x).$$

On a $$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{\sqrt{1 - x^2}} \sin(n \text{ arc cos } x),$$

d'où

(2) $$\frac{dy}{dx}\sqrt{1 - x^2} = n \sin(n \text{ arc cos } x);$$

multipliant les deux membres de (1) par n, puis élevant au carré et ajoutant avec le carré de (2), il vient

$$n^2y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2(1 - x^2) = 1,$$

d'où, par dérivation,

(3) $$\frac{d^2y}{dx^2}(1 - x^2) - \frac{dy}{dx}x + n^2y = 0.$$

Posons

$z = \text{arc cos } x$, d'où $x = \cos z$ et $\cos (n \text{ arc cos } x) = \cos nz$;

$\cos nz$ s'exprime comme on sait en fonction entière de $\cos z$ par la formule

$$\cos nz = \cos^n z - \frac{n(n-1)}{1.2} \cos^{n-2} z(1 - \cos^2 z)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cos^{n-4} z(1 - \cos^2 z)^2 - \dots ;$$

donc

$$(4) \qquad y = A_0 x^n + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{2h} x^{n-2h} + \dots ,$$

en désignant par A_0, A_2, ... les coefficients de $\cos^n z$, $\cos^{n-2} z$, ... dans le développement précédent.

De (4) on déduit

$$\frac{dy}{dx} = nA_0 x^{n-1} + (n-2)A_2 x^{n-3} + \dots + (n-2h)A_{2h} x^{n-2h-1} + \dots ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (n-1)nA_0 x^{n-2} + \dots + (n-2h-1)(n-2h)A_{2h} x^{n-2h-2} + \dots$$

Substituant à y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ leurs expressions en fonction de x, dans (3), puis exprimant que le coefficient de x^{n-2h} est nul dans le premier membre de cette équation, il vient

$$A_{2h} = -\frac{(n-2h+1)(n-2h+2)}{4h(n-h)} A_{2h-2} ;$$

on en déduit

$$A_{2h} = \frac{(-1)^h}{4^h} n \frac{(n-h-1)(n-h-2) \dots (n-2h+2)(n-2h+1)}{h!} A_0 .$$

Il suffit d'avoir A_0. Or, en se reportant au développement de $\cos nz$, on voit que le coefficient de $\cos^n z$ est égal à la somme des coefficients de rang impair du développement de $(a+b)^n$, ou à 2^{n-1}. Donc $A_0 = 2^{n-1}$, et on a en général

$$A_{2h} = \left(-\frac{1}{4}\right)^h \frac{n(n-h-1)(n-h-2) \dots (n-2h+2)(n-2h+1)}{h!} 2^{n-1} .$$

Le polynome (4) étant alors défini, il est facile d'avoir l'expression de $\frac{d^k y}{dx^k}$. En effet

$$\frac{d^k y}{dx^k} = n(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k} A_0 + \dots$$
$$+ (n-2h)(n-2h-1) \dots (n-2h-k+1) x^{n-2h-k} A_{2h} + \dots$$

où on a les valeurs de $A_0, \ldots, A_{2h}, \ldots$ Si l'on veut, le terme général de $\frac{d^k y}{dx^k}$ aura pour expression, après réduction,

$$\frac{(-1)^h}{4^h h!} n(n-h-1)(n-h-2) \ldots (n-2h-k+1) 2^{n-1} x^{n-2h-k}.$$

Question IV. — *Soit à chercher de même les dérivées successives de*

$$y = \sin(n \arccos x).$$

Posant toujours $z = \arccos x$, on a

$$(5) \quad \sin nz = \sqrt{1-\cos^2 z}\left[\frac{n}{1}\cos^{n-1} z - \frac{n(n-1)(n-3)}{3!}\cos^{n-3} z(1-\cos^2 z) + \ldots\right]$$

c'est-à-dire

$$(6) \qquad y = \sqrt{1-x^2}\,(B_1 x^{n-1} + B_3 x^{n-3} + \ldots).$$

Soit u le polynome entre parenthèses : de

$$(7) \qquad y = u\sqrt{1-x^2},$$

on déduit

$$(8) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\sqrt{1-x^2} - \frac{ux}{\sqrt{1-x^2}}$$

et

$$(9) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2}\sqrt{1-x^2} - \frac{2x\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-x^2}} - u\,\frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}.$$

D'ailleurs il est clair que y satisfait à la même équation différentielle que précédemment :

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}(1-x^2) - \frac{dy}{dx}x + x^2 y = 0.$$

Éliminant alors y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ entre (7), (8), (9) et (3), on trouve en réduisant

$$(10) \qquad \frac{d^2u}{dx^2}(1-x^2) - 3\frac{du}{dx}x + (n^2-1)u = 0.$$

J'exprime que le polynome u vérifie (10), en écrivant que le coefficient du terme en x^{n-2h-1} dans (10) est nul, ce qui donne

$$B_{2h+1} = (-1)^h \frac{(n-2h+1)(n-2h)}{4h(n-h)} B_{2h-1}.$$

On déduit de là

$$B_{2h+1} = (-1)^h \frac{(n-h-1)\ldots(n-2h)}{4^h h!} B_1,$$

et enfin

$$B_{2h+1} = \left(-\frac{1}{4}\right)^h \frac{(n-h-1)(n-h-2)\ldots(n-2h)}{h!} 2^{n-1}.$$

Le polynome u étant ainsi défini, on aura la dérivée d'ordre k en appliquant la formule de Leibniz à l'expression $y = u\sqrt{1-x^2}$.

Remarque. — Sin (n arc cos x) peut se déduire de cos (n arc cos x) par différentiation, et l'on voit de suite que l'on a

$$B_{2h+1} = \frac{n-2h}{n} A_{2h}.$$

Question V. — *Calcul de la dérivée d'ordre r de la fonction*

$$y = u^n,$$

où

$$u = x^2 + px + q.$$

Première méthode. — Soient α et β les racines, réelles ou imaginaires, de l'équation $u = 0$. Nous avons

$$y = (x-\alpha)^n(x-\beta)^n,$$

et il ne reste plus qu'à appliquer la formule de Leibniz.

Deuxième méthode. — Remarquons avec Lagrange que si dans la fonction y on remplace x par $x+h$, puis que par un procédé quelconque on ordonne le résultat par rapport aux puissances de h, le coefficient de $\frac{h^r}{r!}$ sera, en vertu de la formule de Taylor, la dérivée d'ordre r cherchée.

Remplaçons donc, dans u, x par $x+h$, ce qui donne

$$u + u'h + h^2.$$

Nous sommes ramenés à élever ce trinome à la puissance n, ce qui se fera simplement en le considérant comme un binome dont les termes sont $u + u'h$ et h^2, et ce qui donnera

$$\frac{d^r y}{dx^r} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)u^{n-r}u'^r\left[1 + \frac{r(r-1)}{1\times(n-r+1)}\frac{u}{u'^2}\right.$$
$$\left. + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2\times(n-r+1)(n-r+2)}\frac{u^2}{u'^4} + \ldots\right].$$

Question VI. — *Trouver les dérivées successives de $y = e^{-x^2}$. Soit $\frac{d^n y}{dx^n} = e^{-x^2} P_n$, P_n étant un polynome entier. Démontrer que l'équation $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles.*

PREMIÈRE MÉTHODE. — Les premières dérivées de y sont

$$\frac{dy}{dx} = -2xe^{-x^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 12xe^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2},$$

. . . . . .

On voit que dans les dérivées d'ordre impair, tous les termes sont de degré impair, et que dans les dérivées d'ordre pair, tous les termes sont de degré pair, et on est conduit à poser

$$\frac{d^ny}{dx^n} = e^{-x^2}P_n,$$

où $$P_n = A_nx^n + A_{n-2}x^{n-2} + A_{n-4}x^{n-4} + \ldots$$

Si maintenant on prend d'après la formule de Leibniz la dérivée d'ordre n de $\frac{dy}{dx}$, il vient

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = -2x\frac{d^ny}{dx^n} - 2n\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

et par suite

(1) $$P_{n+1} = -2xP_n - 2nP_{n-1};$$

mais on a $$\frac{d^ny}{dx^n} = e^{-x^2}P_n,$$

d'où, en prenant les dérivées des deux membres,

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = -2xe^{-x^2}P_n + e^{-x^2}\frac{dP_n}{dx};$$

mais $$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = e^{-x^2}P_{n+1},$$

et en comparant ces deux dernières égalités,

(2) $$P_{n+1} = -2xP_n + \frac{dP_n}{dx}.$$

De la comparaison de (1) et (2), on déduit

(3) $$\frac{dP_n}{dx} + 2nP_{n-1} = 0.$$

Dans (2) je change n en $n-1$:

(4) $$P_n = -2xP_{n-1} + \frac{dP_{n-1}}{dx}.$$

Tirant, de (3), P_{n-1}, puis $\frac{dP_{n-1}}{dx}$, et remplaçant dans (4), il vient

$$P_n = \frac{x}{n}\frac{dP_n}{dx} - \frac{1}{2n}\frac{d^2P_n}{dx^2},$$

ou

$$(5) \qquad nP_n - x\frac{dP_n}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d^2P_n}{dx^2} = 0.$$

Cette équation ne renferme plus que P_n et ses deux premières dérivées : elle va pouvoir servir à déterminer les différents coefficients de ce polynome.

On a en effet

$$P_n = A_n x^n + A_{n-2}x^{n-2} + A_{n-4}x^{n-4} + \cdots,$$

d'où

$$\frac{dP_n}{dx} = nA_n x^{n-1} + (n-2)A_{n-2}x^{n-3} + (n-4)A_{n-4}x^{n-5} + \cdots$$

$$\frac{d^2P_n}{dx^2} = n(n-1)A_n x^{n-2} + (n-2)(n-3)A_{n-2}x^{n-4} + (n-4)(n-5)A_{n-4}x^{n-6} + \cdots$$

Remplaçant, dans (5), $\frac{dP_n}{dx}$ et $\frac{d^2P_n}{dx^2}$, et égalant à 0 le coefficient du terme en x^{n-2p}, il vient

$$nA_{n-2p} - (n-2p)A_{n-2p} + \frac{1}{2}(n-2p+2)(n-2p+1)A_{n-2p+2} = 0,$$

d'où
$$\frac{A_{n-2p+2}}{A_{n-2p}} = -4\frac{p}{(n-2p+2)(n-2p+1)}.$$

Faisant dans cette formule, successivement, $p = 1$, $p = 2$, . . et multipliant tout membre à membre, il vient

$$\frac{A_n}{A_{n-2p}} = (-4)^p \frac{p!}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2p+2)(n-2p+1)}$$

Mais on voit facilement, par le moyen des premières dérivées calculées précédemment, que $A_n = (-2)^n$. Remplaçant A_n par cette valeur, et réduisant le second membre de l'égalité précédente, on a

$$A_{n-2p} = (-1)^{n-p}2^{n-2p}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2p+2)(n-2p+1)}{p!}.$$

Cette formule donne la valeur du $(p+1)^{ième}$ terme (les termes étant ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x), dans le polynome P_n.

Démontrons maintenant que l'équation $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles.

Première méthode. — (Par le théorème de Rolle).

Je remarque d'abord que e^{-x^2} et ses diverses dérivées sont des fonctions continues, qui sont toutes nulles pour $x = \pm\infty$. Cela posé x allant de $-\infty$ à $+\infty$, e^{-x^2} va de 0 à 0 sans s'annuler pour d'autres valeurs : donc sa dérivée passe au moins une fois par zéro, pour une valeur de x racine de $P_1 = 0$.

De même la fonction $e^{-x^2}P_1$, lorsque x va de $-\infty$ à $+\infty$, va de 0 à 0 en passant une fois par 0 : on en déduit que $e^{-x^2}P_2$ passe au moins deux fois par zéro : ainsi $P_2 = 0$ a ses deux racines réelles.

De proche en proche, on voit que $P_n = 0$, équation de degré n, a au moins n racines réelles. Autrement dit, cette équation a ses racines toutes réelles. (M. Tisserand, *Exercices de calcul infinitésimal.*)

Deuxième méthode. — Remarquant toujours que e^{-x^2} et ses dérivées s'annulent pour $x = \pm\infty$, on construira la courbe $y = e^{-x^2}$, puis la courbe $y = e^{-x^2}P_1$, etc. On constatera que cette seconde courbe rencontre Ox en un point, que la troisième coupe Ox en deux points, ..., que la $(n+1)^{ième}$ coupe Ox en n points. Cette méthode ne différera pas, somme toute, de la précédente.

Troisième méthode. — (Par le théorème de Sturm).

On appliquera le théorème de Sturm, une fois qu'on aura constaté les propriétés suivantes :

1° Chaque fonction est continue ;

2° Deux fonctions consécutives ne s'annulent pas en même temps ;

3° Si $P_n = 0$. P_{n+1} et P_{n-1} sont de signes contraires ;

4° Enfin V_0 conserve un signe constant.

Deuxième méthode. — Nous remplaçons, dans y, x par $x+h$, ce qui fait

$$e^{-(x^2+2hx+h^2)} = e^{-x^2}e^{-2hx}e^{-h^2}.$$

Mais nous avons

$$e^{-2hx} = 1 - \frac{2x}{1}h + \frac{(2x)^2}{1.2}h^2 - \frac{(2x)^3}{3!}h^3 + \cdots,$$

$$e^{-h^2} = 1 - \frac{h^2}{1} + \frac{h^4}{1.2} - \frac{h^6}{3!} + \cdots$$

Il suffit de multiplier ces deux séries : le coefficient de $\frac{h^n}{n!}$ fournira, après multiplication par e^{-x^2}, la dérivée d'ordre n cherchée.

La même méthode est applicable aux fonctions de la forme $a^{\lambda x^2}$.

(Gregory.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1 Dérivée de $$y = e^{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x}.$$

On trouve $$y' = (1 + 2x \operatorname{arc\,tg} x)\, e^{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x}.$$

2. Dérivée de $$y = \arcsin\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

On trouve $$y' = \pm \frac{\log e}{x \log x \sqrt{(\log x)^2 - 1}}.$$

3. Dérivée de y par rapport à x, x et y étant liés par la relation

$$u = y \log x + xa^y + b = 0.$$

On trouve $$\frac{dy}{dx} = -\frac{y \log e + xa^y}{\log e \log x + xa^y} \frac{\log e}{x}.$$

4. Dérivée de $$y = x^{\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

En posant $x = \sin z$, on trouve

$$\frac{y'}{y} = z' \mathrm{L}x + \frac{z}{x},$$

d'où $$y' = y\left[\frac{\mathrm{L}x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x}\right].$$

5. Dérivée de $$y = \arcsin(3x - 4x^3).$$

Posons $x = \sin z$, alors

$$y = \arcsin(3 \sin z - 4 \sin^3 z) = \arcsin(\sin 3z),$$

d'où $$y' = \pm 3z' = \frac{\pm 3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Retrouver ce résultat directement.

6. Dérivée de $$y = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{(1+x^3)^2}}.$$

On trouve $$y' = x \frac{1 + \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}}{\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{(1+x^3)^2}}}.$$

7. Dérivée de $$y = f(1 + \sqrt{x}, 1 - \sqrt{x}).$$

On trouve $$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} (f'_{1+\sqrt{x}} - f'_{1-\sqrt{x}}).$$

8. Dérivée de $$y = a^{e^{x^4-x}}.$$

On trouve $$y' = (4x^3 - 1)e^{x^4-x}a^{e^{x^4-x}}\mathrm{L}a.$$

9. Dérivée de $$y = \log\,[\log\,(a + bx^m)].$$

On trouve $$y' = \frac{mbx^{m-1}\,(\log e)^2}{(a + bx^m)\,[\log\,(a + bx^m)]}.$$

10. Dérivée de y par rapport à x, x et y étant liés par la relation

$$\text{arc sin}\,\frac{x}{h} + \text{arc sin}\,\frac{y}{k} = \sigma.$$

On trouve $$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{k^2 - y^2}{h^2 - x^2}}.$$

11. Différentielle totale de $z = (x^3 - 2y)^2 + \sqrt{xy}$.

$$dz = \left[6x^2(x^3 - 2y) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\right]dx - \left[4(x^3 - 2y) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\right]dy.$$

12. Différentielle totale de $t = f(x, y, z + ay^2)$.

$$dt = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y} + 2ay\frac{\partial f}{\partial(z + ay^2)}\right]dy + \frac{\partial f}{\partial(z+ay^2)}dz.$$

13. Différentielle totale de $t = (x^n - 3e^y + a\log z)^n$.

$$dt = n(x^n - 3e^y + a\log z)^{n-1}(nx^{n-1}dx - 3e^y dy + \frac{a}{z}\log e\,dz).$$

Trouver les dérivées des fonctions suivantes, par rapport à x :

14. $(\text{arc sin}\,x)^2$.

15. $x + \sqrt{x^2 + a^2}$.

16. $\mathrm{L}(x + \sqrt{x^2 + a^2})$.

17. $(5x + 6)^{x^2+x+1}$.

18. $a^{\left(\text{arc tg}\,\frac{x^2+1}{2x^2+3}\right)}\log\frac{1}{x}$.

19. $(\log x)^{\text{arc tg}\,x}$.

20. $(\text{arc tg}\,x)^{\log x}$.

21. $\text{arc tg}\,\frac{2x}{1 - x^2}$.
(Poser $x = \text{tg}\,\varphi$).

22. $\text{arc tg}\,\frac{2ax}{\text{tg}\,x}$.

23. $\text{arc tg}\,\frac{a + x}{1 - ax}$.
(Poser $a = \text{tg}\,\alpha$, $x = \text{tg}\,\varphi$).

24. $\text{arc sin}\,(1 - x^2)$.
(Poser $x = \cos\varphi$).

25. $\text{arc sin}\,\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a}$.

26. $(\text{arc sin}\,x)^x$.

27. $e^{\text{arc sin}\,x}\sqrt{\mathrm{L}x}$.

28. $[\mathrm{L}(1 + x^2)]\,(\text{arc sin}\,x)^{e^x}$.

29. $\dfrac{(\text{arc sin } x)^2 (\text{tg } x)^{\text{L}x}}{\sqrt{1 + x \cos x}}$.

30. $\text{L}(5x + 6)^{2x-1}$.

31. $\text{arc tg } \dfrac{1 + 3x}{1 + x + x^2}$.

32. $\text{L tg } \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

33. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\text{tg } x}$.

34. $\text{arc sin } \sqrt{\dfrac{1}{x}}$.

35. $\text{tg } (mx + n)^{x^2}$.

36. $\text{arc cos } \dfrac{a - 2x}{a}$.

37. $\dfrac{x}{\text{L}(1-x)}$.

38. $\dfrac{e^x}{(\text{tg } x)^x}$.

39. $\dfrac{\sin x}{\text{tg } x + e^x}$.

40. $\dfrac{3x}{\sqrt[4]{1 + x^2}}$.

41. $\log \sqrt{\dfrac{x - 1}{\sin x}}$.

42. $\sqrt[m]{\dfrac{\sin x}{\text{arc tg } x}}$.

43. $\sqrt{\dfrac{\text{arc sin } x}{x}}$

44. $\text{arc tg} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ (Poser $x = \sin \varphi$).

45. $\dfrac{\sin \sqrt{x}}{\text{L}x}$

46. $\dfrac{\log \log x}{\text{arc tg } x}$.

47. $\dfrac{\log \sin x}{\text{arc sin } x}$.

48. $\dfrac{\log \text{arc tg } x}{\sqrt{x}}$.

49. $\left[\dfrac{\text{arc sin } x}{\text{arc } (m \text{ tg } x)}\right]^m$.

50. $\dfrac{\cos x}{e^x + e^{-x}}$.

51. $\dfrac{e^x}{(\text{arc tg } x)^4}$.

52. $\dfrac{\text{tg } x^x}{\text{arc tg } x^x}$.

53. $\log \text{arc sin } \dfrac{x}{\log x}$.

54. $\dfrac{\text{arc tg } (1 + x^2)}{\text{arc sin } (1 - x^2)}$.

55. $\text{arc cos } \dfrac{a \cos x + b}{b \cos x + a}$.

56. $e^{f(e^x)}$.

57. $\dfrac{\log \text{arc tg } x}{\sqrt{x}}$.

58. $\dfrac{\log \log x}{\text{arc sin } x^x}$.

59. $\dfrac{\text{arc sin } x^2}{\log \text{séc } x}$.

60. $\dfrac{\sin \sqrt{x}}{\text{arc cosséc } x}$.

61. $\dfrac{e^{\text{tg } x}}{\log \text{arc sin } x}$.

62. $\sqrt[7]{\text{arc tg } (\sin x)}$.

63. $\log \dfrac{\text{arc tg } x}{\sin x^2}$.

64. $\dfrac{e^x}{(\text{arc tg } x)^2}$.

65. $\sqrt[4]{\dfrac{e^x + e^{-x}}{\sin x + \cos x}}$.

66. $\text{arc tg } \dfrac{1 + x}{\sqrt[4]{2 + x}}$.

67. $(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

68. $\text{arc sin}\sqrt{x+2}$.

69. $\text{arc sin}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

70. $e^{\sqrt{\text{arc tg } x}}$.

71. $x^{\cos x}$.

72. $\text{arc sin}\frac{2x}{\log x}$.

73. $\text{arc cos}(x\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-x^2})$. (Prévoir le résultat).

74. $\text{arc tg}\frac{a+bx}{b-ax}$. (Prévoir le résultat).

75. $(\sin x)^{\text{arc cotg}\frac{1}{x^2}}$.

76. $\sin \text{arc tg}\frac{1}{x^2}$.

77. $\text{L arc sin tg}\frac{x}{2}$.

78. $\log(\cos x + i\sin x)$.

79. $\text{arc tg}\left(1+\frac{x^2}{x-1}\right)$.

80. $\text{arc tg}\frac{x\cos x+\sqrt{\log x}}{\sin x^2}$.

81. $x^{\sqrt{\log\log x}}$.

82. $\frac{x\sqrt{x}+\cos(1+x^2)}{1-x}$.

83. $\text{arc sin}\frac{x^x+\sqrt{\cos x}}{1-x}$.

84. $(\sin x)^{(\text{L}x)^{-1}}$.

85. $e^{\text{arc sin } e^x}$.

86. $e^{x\,\text{arc sin } x\sqrt{2}}$

87. $\frac{\pm\sqrt{1-x^2}}{\cos[x\text{L}(1+x^2)]}$. Dans quels intervalles cette dérivée existe-t-elle ?

88. $$\sqrt{\frac{2z^2}{k^3a}}\left[\frac{a}{2}\text{ arc cos }\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}+\sqrt{x(a-x)}\right].$$

Résultat $-\sqrt{\frac{2z^2}{k^3a}}\sqrt{\frac{x}{a-x}}$.

Calculer $\frac{dy}{dx}$, y et x étant liés par une des relations

89. $x^2+y^2=a^2e^{\text{arc sin}\frac{2xy}{x^2+y^2}}$.

90. $x^y=y^x$.

91. $e^y-2(y-x)e^x=0$.

92. $y=(4x^2-5x+y)^{4x^2-5x+y}$.

93. $y=(4x^2+2x+1)^{3x^2+6}$.

94. $y=\cos^m ax^p$.

95. $\left(\frac{y}{x}\right)^2=\left(\frac{\text{L}y}{\text{L}x}\right)^2$.

96. $y=1+xe^y$.

97. Soit u une fonction de p et de q, p et q étant eux-mêmes fonctions de x et de y. On a

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} dp^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} dp dq + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial u}{\partial p} d^2p + \frac{\partial u}{\partial q} d^2q.$$

98. Si l'on pose

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{\gamma}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2},$$

avec

$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

et qu'une fonction v considérée comme fonction de x, y, z satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

on aura, en considérant v comme fonction de α, β, γ,

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{v}{\rho}\right)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{v}{\rho}\right)}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{v}{\rho}\right)}{\partial \gamma^2} = 0.$$

(Bertrand.)

99. x et y étant liés par la relation

$$e^x y + e^y z + e^z x = 0,$$

calculer $\frac{\partial x}{\partial z}$ et $\frac{\partial y}{\partial z}$.

100. Dérivée de $y = \mathrm{L}\left(\mathrm{arc\,tg} \frac{x+b}{1-bx}\right)$ par rapport à $\cos x$: prévoir le résultat.

101. Calculer $\frac{d\rho}{d\omega}$, sachant que

$$f(x, y) = 0, \qquad x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega.$$

102. L'équation

$$\sqrt{1+x^2}\, dx + \sqrt{1+y^2}\, dy + ny dx + nx dy = 0$$

est vérifiée quand il existe entre y et x une des relations

$$2nxy + x\sqrt{1+x^2} + \mathrm{L}(x + \sqrt{1+x^2}) + y\sqrt{1+y^2} + \mathrm{L}(1 + \sqrt{1+y^2}) = \mathrm{A},$$

$$x^2 + y^2 + 2xy\sqrt{1+n^2} = n^2,$$

où A est une constante. (Legendre, 1811.)

103. Trouver les dérivées de y et de z par rapport à x, y et z étant liés à x par les relations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3z + a = 0, \\ z^2 - 2y^2 - x + b = 0. \end{cases}$$

104. La formule

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$

ayant été établie directement, en déduire les expressions de $\sin(a \pm b)$ et de $\cos(a \pm b)$.

105. Si f et φ sont deux polynomes entiers en x et de même degré n, la quantité suivante est constante :

$$f\varphi^{(n)} - f'\varphi^{(n-1)} + f''\varphi^{(n-2)} - \cdots + (-1)^{n-1}f^{(n-1)}\varphi' + (-1)^n f^{(n)}\varphi.$$

(HALPHEN.)

106. Soient $t = f(x, y)$; $u = F(x, y)$; on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t}\right) = 1.$$

(MÖBIUS.)

107. Dérivées partielles et différentielle totale de

$$F\left(\frac{e^x}{\sin y - \cos z}\right).$$

(HOUËL.)

108 Même question pour

$$x^3 - 2y^2z + ax \log y.$$

En supposant x, y, z liés par la relation $xz = y^2$, éliminer tour à tour x, y, z, et calculer alors les dérivées partielles de la fonction par rapport aux variables restantes. (HOUËL.)

109. Démontrer que

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\sin nu,$$

où

$$x = \cos u.$$

Trouver les dérivées d'ordre n des fonctions suivantes :

110.
$$\frac{x^p}{(x^2-1)(x+1)}.$$

111
$$\frac{1}{x^2+x+1}.$$

112.
$$a^{\frac{x}{x^2-1}}.$$

113.
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

114. $e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$. Résultat $e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta + n\theta)$.

(GREGORY.)

115. $e^{ax}\cos px$. Résultat $e^{ax}(a^2+p^2)^{\frac{n}{2}}\cos\left(px + n \operatorname{arc\,tg}\frac{p}{a}\right)$.

(GREGORY.)

116.
$$x^p \mathrm{L}x.$$

117.
$$\frac{\left(1+\frac{x}{a}\right)^m}{\left(1+\frac{x}{b}\right)^p}.$$

118. $(a^2 + x^2)^p$.

119. $\dfrac{1}{(a^2 + x^2)^p}$.

120. e^{x^2}.

121. $a^{\lambda x^2}$.

122. $\dfrac{x}{a^2 + x^2}$.

123. $\dfrac{x}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$. Appliquer la méthode de Lagrange à la première dérivée de cette fonction.

124 $\sqrt{1 - x^2}$. On trouve $y^{(n)} = P_n(1 - x^2)^{-\frac{2n-1}{2}}$. Étudier l'équation $P_n = 0$; chercher combien elle a de racines entre ± 1.

125. Etant donnée la fonction

$$f(x, y, z) = (x + z)(2y - z)(2y - 4x + z) + 5xz^2 - 3z^3,$$

on a, en appelant H son *hessien*,

$$H = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{vmatrix} = 8^3 \begin{vmatrix} -2y + z & y - 2x - z & x - y + 2z \\ y - 2x - z & x + z & y - x \\ x - y + 2z & y - x & 2x - 3z \end{vmatrix}$$

CHAPITRE V

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES DÉRIVÉES A LA RECHERCHE DES MAXIMA ET DES VRAIES VALEURS

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — *Trouver le plus grand nombre de la suite*

$$\sqrt[2]{2} \quad \sqrt[3]{3} \quad \sqrt[4]{4} \quad \ldots$$

On voit, en prenant la dérivée de la fonction $y = x^{\frac{1}{x}}$, que y présente un maximum pour $x = e$. Donc x étant entier ne peut être égal qu'à 2 ou à 3. On est ainsi ramené à une simple vérification, et comme

$$\sqrt[2]{2} < \sqrt[3]{3},$$

le plus grand nombre de la suite est $\sqrt[3]{3}$.

Question II. — *Trouver la limite de* $(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ *pour* $x = 0$.

Posons $\cos\sqrt{x} = 1 - z$, d'où $z = 2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}$;

alors

$$\lim_{x=0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{z=0}(1-z)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim -\frac{z}{x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Question III. — *Trouver la limite de* $\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$ *pour* n *infini.*

Première méthode. — $\frac{1}{n^n}$ est le terme de rang n de la série

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2^2} \quad \frac{1}{3^3} \quad \cdots \quad \frac{1}{(n-1)^{n-1}} \quad \frac{1}{n^n} \quad \cdots$$

En général on sait que si u_n désigne le $n^{ième}$ terme d'une série, les deux expressions

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}, \qquad \sqrt[n]{u_n}$$

ont la même limite. Ici

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{n}, \qquad \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}.$$

La première de ces expressions a pour limite zéro, donc il en est de même de la seconde.

Deuxième méthode. — On retrouve ce résultat en écrivant l'expression proposée ainsi :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n-1},$$

où le premier facteur tend vers $\frac{1}{e}$, le second vers zéro.

Question IV. — Maxima d'une fonction de deux variables indépendantes.

Soit une fonction $f(x, y)$ des variables x et y. Pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut que pour des valeurs très petites en valeurs absolues attribuées à h et à k, l'expression

$$D = f(x+h, \quad y+k) - f(x, y)$$

conserve un signe invariable. Mais on a

$$D = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit par rapport aux termes qui précèdent. On en déduit les conditions

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

car autrement D changerait de signe quand on remplacerait h par $-h$ et k par $-k$.

Ces conditions sont-elles suffisantes ? Pour s'en rendre compte, il suffit de remarquer que si elles sont remplies D s'écrit

$$D = \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \varepsilon_1,$$

ε_1 étant infiniment petit par rapport aux termes qui précèdent. Nous examinons d'ailleurs seulement le cas où les relations (1) n'entraînent pas la nullité des dérivées secondes de f.

Il s'agit d'exprimer que

$$D = \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{k}{h}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left(\frac{k}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$$

conserve un signe constant. Or la quantité entre crochets est un trinome du second degré en $\frac{k}{h}$, et il faut alors que l'équation obtenue en l'égalant à zéro ait ses racines imaginaires :

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0.$$

Il suit de là que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ doivent être de même signe :

1° Si ce signe est positif, le trinome est toujours positif, il y a minimum ;

2° Si ce signe est négatif, le trinome est toujours négatif, il y a maximum.

QUESTIONS PROPOSÉES

Trouver les vraies valeurs des expressions suivantes :

1. $\frac{x^\alpha - 1}{\alpha}$, pour $\alpha = 0$.

2. $\left(\frac{m+x}{m-1}\right)^m$, pour $m = \infty$.

3. $\sqrt{(x+1)^2 - 4} - \sqrt{(x+3)^2 + 5}$, pour $x = \infty$.

4. $\sqrt{(x+a)^2 + b} - \sqrt{x^2 + c}$, pour $x = \infty$.

5. $x - \sqrt{x^2 - 2x}$, pour $x = \infty$.

6. $\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$, pour $x = \frac{\pi}{2}$.

7. $n(\sqrt[n]{a} - 1)$, où $a > 1$, pour $n = \infty$.

8. $\frac{(x-y)a^m + (a-x)y^m - (a-y)x^m}{(x-y)(a-x)(a-y)}$, pour $x = y = a$.

9. $\frac{\sin x - x}{e^x - 1}$, pour $x = 0$.

10. $\left(\cos\frac{a}{x}\right)^{x^2}$, pour $x = \infty$.

11. $\frac{\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{f(a)}}{x - a}$, pour $x = a$.

12. $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$, pour $x = 0$.

13. $x^3\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+x$, pour $x=\infty$.

14. $\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\cdots\right)^m$, pour $m=\infty$.

15. $\frac{x^m-x^{m+n}}{1-x^{2p}}$, pour $x=1$.

16 $\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n$, pour $n=\infty$.

17. $\frac{1}{m}-\frac{1}{2\sqrt{\frac{m^2+1}{m}}}$, pour $m=\infty$.

18. $\left(\frac{m^2+2m-1}{m^2+3m+2}\right)^m$, pour $m=\infty$.

19. $(1+x)^{Lx}$, pour $x=0$.

20. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$, pour $x=0$.

21. $\sqrt[3]{x^3+2x^2-x+1}-\sqrt[3]{x^3-5x^2+2x+3}$, pour $x=\infty$.

Développer en séries, ou bien, en appelant A et B les deux quantités sous radical, se servir de ce que l'on a

$$A-B=(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}).$$

22. $\frac{x}{e^x-1}$, pour $x=0$. On trouve 1.

23. $\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$, pour $x=0$.

On trouve $-\frac{e}{2}$.

24. $\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e+\frac{ex}{2}}{x^2}$, pour $x=0$. On trouve $\frac{11e}{24}$.

25. $\frac{1-2m+m^2}{m^2-1}$, pour $m=\infty$.

26. $\frac{x^2-x}{1-x-Lx}$, pour $x=1$.

27. Valeurs des premières dérivées de $x \operatorname{cotg} x$, pour $x=0$.

Vraies valeurs des expressions :

28. $\frac{a^x-b^x}{x}$, pour $x=0$.

29. $\frac{a-x-aLa+aLx}{a-\sqrt{2ax-x^2}}$, pour $x=a$.

30. $\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$, pour $x=\frac{\pi}{2}$.

31. $\frac{x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{2ax-a^2}}{x^2-2ax-a^2+2a\sqrt{2ax-x^2}}$, pour $x=a$.

Le résultat est $-5a$. Si on veut appliquer la règle de l'Hôpital, il sera nécessaire de différentier quatre fois le numérateur et le dénominateur (Lacroix).

32. $(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$, pour $x=1$.

33. $\sqrt[x^2]{\cos x}$, pour $x=0$.

34. $\frac{\operatorname{tg}\pi x-\pi x}{x^2\operatorname{tg}\pi x}$, pour $x=0$.

35. $\frac{a^{\alpha x}-b^{\beta x}}{\gamma x}$, pour $x=0$.

36. $\left(\cos\frac{a}{x}\right)^{x^2}$, pour $x=\infty$.

37. $\left(\frac{a^{\frac{1}{m}}+b^{\frac{1}{m}}}{2}\right)^m$, pour $m=\infty$.
(Résultat : $\sqrt{ab}$.)

38. Plus généralement,
$\left(\frac{pa^{\frac{1}{m}}+qb^{\frac{1}{m}}+\cdots}{p+q+\cdots}\right)^m$, pour $m=\infty$.
(Laisant, *Journal de Mathématiques Spéciales.*)

39. $\frac{(x^3-a^2)^{\frac{1}{3}}+(x+a)^{\frac{3}{2}}+x^3+a^3}{(x+a)^{\frac{1}{2}}+(a^3-3ax^2-2x^3)^{\frac{2}{3}}}$,
pour $x=-a$. (Mention.)

40. $\frac{(\mathrm{L}x)^{\frac{2}{3}}+(1-x^2)^{\frac{3}{4}}\cos(1-x)^{\frac{1}{x-1}}}{\sin^{\frac{2}{3}}(x-1)+a^{\frac{1}{1-x}}}$,
pour $x=1$.

41. On a

$$\lim_{n=\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{a^{\frac{p+1}{n}}-1}=\frac{1}{p+1}.$$

42. On a

$$\lim\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)k=\mathrm{L}a\times\lim\frac{k}{n},$$

où k et n augmentent indéfiniment.

43. Variations de l'expression

$$y=a\sin\varphi+b\cos\varphi+c.$$

44. Variations de l'expression $\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

45. Variations de la surface d'un segment de cercle de rayon variable et d'arc constant.

46. Variations de la surface d'un triangle dont on donne deux hauteurs.

47. Maximum du volume d'un cylindre circulaire droit de surface totale constante.

48. Un disque m, posé sur une table horizontale AB, est éclairé par une lampe F, dont le pied B est fixé à une distance invariable du disque m, mais que l'on peut hausser ou baisser suivant la verticale BF. On demande à quelle hauteur on doit la fixer pour que le disque m reçoive la plus grande clarté possible. On supposera le disque et le foyer lumineux de dimensions négligeables.

49. Trouver le point le moins échauffé sur la droite qui joint deux foyers de chaleur, sachant que l'intensité de la chaleur rayonnante varie en raison inverse du carré de la distance au foyer calorifique.

50. Quand on veut mesurer la hauteur h d'une ligne verticale AB, on mesure, à partir du pied de la verticale, une distance horizontale $BC = b$; on observe l'angle $BCA = x$, et l'on a

$$h = b \operatorname{tg} x.$$

Cela posé, il s'agit de choisir la base arbitraire h, de manière à former le triangle le plus avantageux, c'est-à-dire celui qui est tel qu'à une même erreur sur l'angle x corresponde l'erreur minimum sur la hauteur cherchée h.

Les trois dernières questions sont extraites du *Calcul infinitésimal* de Cournot, I, p. 162.

51. Diviser 8 en deux parties telles que le produit de l'une par l'autre et par leur différence soit le plus grand possible. (Problème proposé par Cardan à Tartaglia lors de la querelle qui suivit la publication du *de Arte magna.*)

52. Maxima et minima de la fonction

$$y = b + \frac{(x^2 - 2ax + a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}.$$

53. Même question pour

$$y = x + \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x}.$$

Les résultats que l'on trouve pour cette fonction diffèrent de ceux qu'on obtient en la rendant d'abord rationnelle. Rolle voyait dans cette apparente contradiction une erreur du Calcul différentiel, nouvellement inventé. (Il est clair que les radicaux sont supposés avoir le signe plus).

54. x étant lié à y par la relation

$$n^2 + b^2 + 2xy - 2nx - 2hy = 0,$$

déterminer x et y par la condition que les rapports $\frac{y-x}{y}$ et $\frac{y-x}{x}$ soient les plus petits possibles. (Détermination des *Anses de panier à trois centres.*)

55. Maximum de l'expression

$$T = p\sqrt{x^2 + \frac{a^4}{4f^2}}.$$

(Construction des ponts en charpente.)

Trouver les maxima ou minima des expressions suivantes :

56. $$(z - u - 1)^2 + (z - 2u + 8)^2 + (u - 1)^2.$$

57 $$(x - y)^2 + (x - 2y)^2 + (x - 1)^2.$$

58. $$(x - y - 1)^2 + (x - 2y + 2)^2 + (x - y)^2.$$

59. $$\frac{(ax + b)^2 + (a'x + b')^2}{(\alpha x + \beta)^2}.$$

60. $$1 + \sqrt[3]{x^2}(7 - x)^2.$$

61. $$\frac{x^4}{y^5} \quad (\text{quand} \quad y - x = k).$$

62. $$\frac{bx^3 - cx^2 - 2bc^2x}{bc^2 + x^3}.$$

Déterminer les coefficients angulaires des tangentes aux courbes

63. $$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

64. $$ax^2 - x^3 - q^2y = 0.$$

65. $$x^5 - 2ax^4 + a^2x^3 - y^5 = 0.$$

Pour les quatre dernières questions, voyez « *Regula de Maximis et Minimis* », par HUGENS DE ZULICHEM, 1643.

66. Pour tout arc x, compris entre 0 et $\frac{\pi}{3}$, la différence $\operatorname{tg} x - x$ est comprise entre $\frac{x^3}{3}$ et x^3. On peut même remplacer la limite supérieure x^3 par $\frac{2}{3}x^3$, en étudiant la fonction $\operatorname{tg} x - x - \frac{2x^3}{3}$ entre 0 et $\frac{\pi}{3}$.

(DELENS.)

67. Trouver la hauteur AB et les bases AD, BC d'un trapèze rectangle ABCD connaissant la longueur l du côté oblique CD, l'aire a^2 du trapèze et le volume $\frac{1}{3}\pi b^3$ engendré par la révolution de la figure autour de CD.

Discuter les formules trouvées et déterminer le minimum et le maximum de b^3. On examinera les cas particuliers suivants :

$$l = a, \qquad l = 3a.$$

(*Concours d'agrégation*, 1883.)

68. Soient deux relations

$$\begin{cases} y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \end{cases}$$

entre n variables x et n constantes a. Démontrer que le maximum de y est

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

(MOIGNO.)

CHAPITRE VI

DÉTERMINANTS. — ÉQUATIONS LINÉAIRES. — DÉCOMPOSITION DES FORMES QUADRATIQUES EN CARRÉS

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — *Calculer le déterminant*

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

J'ajoute les trois premières colonnes à la quatrième, et je mets 2 en facteur :

$$(1) = 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

retranchant la dernière ligne de chacune des autres, il vient

$$(1) = 2 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -16.$$

Question II. — *Calculer le déterminant*

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

Je retranche la quatrième colonne de la deuxième et de la troisième :

$$(2) = - \begin{vmatrix} 1 & -b & a-b \\ 1 & a-c & -c \\ 1 & b & c \end{vmatrix},$$

puis dans ce nouveau déterminant la première ligne de chacune des autres :

$$(2) = - \begin{vmatrix} a+b-c & -a+b-c \\ 2b & -a+b+c \end{vmatrix},$$

enfin je retranche la deuxième ligne de la première :

$$\begin{aligned} (2) &= - \begin{vmatrix} a-b-c & -2c \\ 2b & -a+b+c \end{vmatrix} \\ &= -[(b+c-a)(a-b-c)+4bc] \\ &= a^2+b^2+c^2-(2bc+2ca+2ab). \end{aligned}$$

Question III. — *Calculer le déterminant*

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Je désigne par l_1, l_2, l_3, l_4 les quatre lignes.

En ajoutant les éléments des quatre lignes, on voit que le déterminant est divisible par $a+b+c$. On reconnait de même qu'il est divisible par $-a+b+c$, $a-b+c$, $a+b-c$, en ajoutant successivement à l_1 les sommes

$$l_2-l_3-l_4, \quad -l_2+l_3-l_4, \quad -l_2-l_3+l_4.$$

Il en résulte, puisque (3) est du quatrième degré par rapport aux lettres qui y entrent, qu'il est de la forme

$$P = \lambda(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$

λ étant numérique.

Pour trouver λ, il suffit de comparer deux termes correspondants de P et du déterminant (3), par exemple ceux en a^4. Le terme en a^4, dans (3), a évidemment pour coefficient $+1$ (les indices 2, 1, 4, 3 présentant deux inversions et les accents 1, 2, 3, 4 n'en présentant aucune); le coefficient de a^4 dans P est $-\lambda$. Ainsi $\lambda = -1$ et

$$(3) = -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

Remarque I. — Le déterminant (3) changé de signe représente 16 fois le carré de la surface d'un triangle dont les côtés sont a, b, c.

Remarque II. — On peut mettre (3) sous une autre forme. Je multiplie en effet, dans (3), la deuxième ligne et la deuxième colonne par bc, la troisième ligne et la troisième colonne par ac, la quatrième ligne et la quatrième colonne par ab. Le déterminant est ainsi multiplié par $a^4b^4c^4$, et on a

$$(3) = \frac{1}{a^4b^4c^4}\begin{vmatrix} 0 & abc & abc & abc \\ abc & 0 & abc^3 & ab^3c \\ abc & abc^3 & 0 & a^3bc \\ abc & ab^3c & a^3bc & 0 \end{vmatrix},$$

ou en divisant chacune des lignes par abc,

$$(3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Remarque III. — Rien ne distinguant dans la première expression de (3), a, b et c entre eux, on peut aussi bien écrire

$$(3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & a^2 \\ 1 & c^2 & 0 & b^2 \\ 1 & a^2 & b^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Question IV. — *On donne le polynome*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2;$$

le mettre sous la forme

$$\alpha_1\gamma_1^2 + \alpha_2\gamma_2^2 + \cdots + \alpha_n\gamma_n^2,$$

telle que γ_p ne renferme que des variables d'ordre au moins égal à p.

(*École Normale.*)

Soit P_1 le polynome proposé. En employant la méthode de décomposition par réduction du nombre des variables, nous l'écrirons

$$P_1 = 2x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3 + \dots + x_n) + (x_2 + x_3 + \dots + x_n)^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

$$= \left(x_1\sqrt{2} + \frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + \dots + x_n)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Enlevons le premier carré, il restera

$$P_2 = \frac{3}{2}x_2^2 + x_2(x_3 + x_4 + \dots + x_n) + \frac{1}{2}(x_3 + x_4 + \dots + x_n)^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

$$= \left[\sqrt{\frac{3}{2}}\,x_2 + \frac{x_3 + x_4 + \dots + x_n}{\sqrt{2.3}}\right]^2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + \dots + x_n)^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2.$$

Enlevons encore le deuxième carré et posons

$$P_3 = \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + \dots + x_n)^2 + x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_n^2$$

$$= \frac{4}{3}x_3^2 + \frac{2}{3}x_3(x_4 + \dots + x_n) + \frac{1}{3}(x_4 + \dots + x_n)^2 + x_4^2 + \dots + x_n^2.$$

En général, si l'on a enlevé les p premiers carrés obtenus en continuant ainsi, le résultat sera

$$P_p = \left(\sqrt{\frac{p+1}{p}}\,x_p + \frac{x_{p+1} + \dots + x_n}{\sqrt{p(p+1)}}\right)^2 + \frac{1}{p+1}(x_{p+1} + \dots + x_n)^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

En effet, cette loi étant vraie pour les trois premiers polynomes, il suffit d'établir que si elle est vraie pour le $(p-1)^{ième}$, elle l'est encore pour le $p^{ième}$. Supposons donc que

$$P_{p-1} = \left[\sqrt{\frac{p}{p-1}}\,x_{p-1} + \frac{x_p + x_{p+1} + \dots + x_n}{\sqrt{(p-1)p}}\right]^2 + \frac{1}{p}(x_p + x_{p+1} + \dots + x_n)^2 + x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Après avoir enlevé le $(p-1)^{ième}$ carré, il restera

$$P_p = \frac{1}{p}(x_p + x_{p+1} + \dots + x_n)^2 + x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2$$

$$= \left[\sqrt{\frac{p+1}{p}} + \frac{x_{p+1} + x_{p+2} + \dots + x_n}{\sqrt{p(p+1)}}\right]^2 + \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p(p+1)}\right](x_{p+1} + \dots + x_n)^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2,$$

et comme $\frac{1}{p} - \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p+1}$, la loi supposée vraie jusqu'à $p-1$, l'est encore jusqu'à p : elle est générale.

Chacun des carrés d'ordre p ne renferme d'ailleurs, comme on le voit, que des x d'indice supérieur à p. On aura pour la décomposition demandée :

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

$$= \left[\sqrt{\frac{2}{1}}\, x_1 + \frac{x_2 + x_3 + \dots + x_n}{\sqrt{1.2}}\right]^2 + \left[\sqrt{\frac{3}{2}}\, x_2 + \frac{x_3 + x_4 + \dots + x_n}{\sqrt{2.3}}\right]^2$$

$$+ \left[\sqrt{\frac{4}{3}}\, x_3 + \frac{x_4 + \dots + x_n}{\sqrt{3.4}}\right]^2 + \dots + \left[\sqrt{\frac{p}{p-1}}\, x_{p-1} + \frac{x_p + x_{p+1} + x_n}{\sqrt{(p-1)p}}\right]^2$$

$$+ \dots + \left[\sqrt{\frac{n}{n-1}}\, x_{n-1} + \frac{x_n}{\sqrt{(n-1)n}}\right]^2 + \frac{n+1}{n}\, x_n^2.$$

Remarque. — Identifions dans les deux membres les coefficients de x_n^2 ; il vient

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{n+1}{n} = 2,$$

d'où l'on déduit facilement la formule

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = 1.$$

Question V. — Dérivée d'un déterminant.

Nous partons, pour abréger le calcul, d'un déterminant du troisième ordre, mais la démonstration sera générale.

Soit à trouver la dérivée du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

dont tous les éléments sont fonctions d'une même variable x. Donnons à x un accroissement Δx, en sorte qu'il en résulte pour chaque fonction telle que a un accroissement Δa. Il s'agit d'évaluer la limite du rapport à Δx de la différence

$$\begin{vmatrix} a + \Delta a & b + \Delta b & c + \Delta c \\ a_1 + \Delta a_1 & b_1 + \Delta b_1 & c_1 + \Delta c_1 \\ a_2 + \Delta a_2 & b_2 + \Delta b_2 & c_2 + \Delta c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

qui, développée, s'écrit

Soit P_1 le polynome proposé. En employant la méthode de décomposition par réduction du nombre des variables, nous l'écrirons

$$P_1 = 2x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3 + \dots + x_n) + (x_2 + x_3 + \dots + x_n)^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$
$$= \left(x_1\sqrt{2} + \frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + \dots + x_n)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Enlevons le premier carré, il restera

$$P_2 = \frac{3}{2}x_2^2 + x_2(x_3 + x_4 + \dots + x_n) + \frac{1}{2}(x_3 + x_4 + \dots + x_n)^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$
$$= \left[\sqrt{\frac{3}{2}}x_2 + \frac{x_3 + x_4 + \dots + x_n}{\sqrt{2.3}}\right]^2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + \dots + x_n)^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2.$$

Enlevons encore le deuxième carré et posons

$$P_3 = \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + \dots + x_n)^2 + x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_n^2$$
$$= \frac{4}{3}x_3^2 + \frac{2}{3}x_3(x_4 + \dots + x_n) + \frac{1}{3}(x_4 + \dots + x_n)^2 + x_4^2 + \dots + x_n^2.$$

En général, si l'on a enlevé les p premiers carrés obtenus en continuant ainsi, le résultat sera

$$P_p = \left(\sqrt{\frac{p+1}{p}}x_p + \frac{x_{p+1} + \dots + x_n}{\sqrt{p(p+1)}}\right)^2 + \frac{1}{p+1}(x_{p+1} + \dots + x_n)^2$$
$$+ x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

En effet, cette loi étant vraie pour les trois premiers polynomes, il suffit d'établir que si elle est vraie pour le $(p-1)^{ième}$, elle l'est encore pour le $p^{ième}$. Supposons donc que

$$P_{p-1} = \left[\sqrt{\frac{p}{p-1}}x_{p-1} + \frac{x_p + x_{p+1} + \dots + x_n}{\sqrt{(p-1)p}}\right]^2$$
$$+ \frac{1}{p}(x_p + x_{p+1} + \dots + x_n)^2 + x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Après avoir enlevé le $(p-1)^{ième}$ carré, il restera

$$P_p = \frac{1}{p}(x_p + x_{p+1} + \dots + x_n)^2 + x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2$$
$$= \left[\sqrt{\frac{p+1}{p}} + \frac{x_{p+1} + x_{p+2} + \dots + x_n}{\sqrt{p(p+1)}}\right]^2$$
$$+ \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p(p+1)}\right](x_{p+1} + \dots + x_n)^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2,$$

et comme $\frac{1}{p} - \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p+1}$, la loi supposée vraie jusqu'à $p-1$, l'est encore jusqu'à p : elle est générale.

Chacun des carrés d'ordre p ne renferme d'ailleurs, comme on le voit, que des x d'indice supérieur à p. On aura pour la décomposition demandée :

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$$

$$= \left[\sqrt{\frac{2}{1}}\, x_1 + \frac{x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{\sqrt{1.2}}\right]^2 + \left[\sqrt{\frac{3}{2}}\, x_2 + \frac{x_3 + x_4 + \cdots + x_n}{\sqrt{2.3}}\right]^2$$

$$+ \left[\sqrt{\frac{4}{3}}\, x_3 + \frac{x_4 + \cdots + x_n}{\sqrt{3.4}}\right]^2 + \cdots + \left[\sqrt{\frac{p}{p-1}}\, x_{p-1} + \frac{x_p + x_{p+1} + x_n}{\sqrt{(p-1)p}}\right]^2$$

$$+ \cdots + \left[\sqrt{\frac{n}{n-1}}\, x_{n-1} + \frac{x_n}{\sqrt{(n-1)n}}\right]^2 + \frac{n+1}{n}\, x_n^2.$$

Remarque. — Identifions dans les deux membres les coefficients de x_n^2; il vient

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{n+1}{n} = 2,$$

d'où l'on déduit facilement la formule

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1.$$

Question V. — Dérivée d'un déterminant.

Nous partons, pour abréger le calcul, d'un déterminant du troisième ordre, mais la démonstration sera générale.

Soit à trouver la dérivée du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

dont tous les éléments sont fonctions d'une même variable x. Donnons à x un accroissement Δx, en sorte qu'il en résulte pour chaque fonction telle que a un accroissement Δa. Il s'agit d'évaluer la limite du rapport à Δx de la différence

$$\begin{vmatrix} a + \Delta a & b + \Delta b & c + \Delta c \\ a_1 + \Delta a_1 & b_1 + \Delta b_1 & c_1 + \Delta c_1 \\ a_2 + \Delta a_2 & b_2 + \Delta b_2 & c_2 + \Delta c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

qui, développée, s'écrit

$$\begin{vmatrix} \Delta a & b & c \\ \Delta a_1 & b_1 & c_1 \\ \Delta a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \Delta b & c \\ a_1 & \Delta b_1 & c_1 \\ a_2 & \Delta b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & \Delta c \\ a_1 & b_1 & \Delta c_1 \\ a_2 & b_2 & \Delta c_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a & \Delta b & \Delta c \\ a_1 & \Delta b_1 & \Delta c_1 \\ a_2 & \Delta b_2 & \Delta c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta a & b & \Delta c \\ \Delta a_1 & b_1 & \Delta c_1 \\ \Delta a_2 & b_2 & \Delta c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta a & \Delta b & c \\ \Delta a_1 & \Delta b_1 & c_1 \\ \Delta a_2 & \Delta b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta a & \Delta b & \Delta c \\ \Delta a_1 & \Delta b_1 & \Delta c_1 \\ \Delta a_2 & \Delta b_2 & \Delta c_2 \end{vmatrix}.$$

Divisons chacun de ces déterminants par Δx :

Les déterminants écrits dans la première ligne donnent des résultats de la forme

$$\begin{vmatrix} \frac{\Delta a}{\Delta x} & b & c \\ \frac{\Delta a_1}{\Delta x} & b_1 & c_1 \\ \frac{\Delta a_2}{\Delta x} & b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

ou, à la limite,

$$\begin{vmatrix} \frac{da}{dx} & b & c \\ \frac{da_1}{dx} & b_1 & c_1 \\ \frac{da_2}{dx} & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Les déterminants écrits sur la deuxième ligne donnent des quotients de la forme

$$\begin{vmatrix} a & \frac{\Delta b}{\Delta x} & \Delta c \\ a_1 & \frac{\Delta b_1}{\Delta x} & \Delta c_1 \\ a_2 & \frac{\Delta b_2}{\Delta x} & \Delta c_2 \end{vmatrix},$$

nuls à la limite, puisque tous les éléments d'une colonne sont nuls à la fois.

Enfin, à plus forte raison, le septième déterminant a pour limite zéro, et il reste :

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{da}{dx} & b & c \\ \frac{da_1}{dx} & b_1 & c_1 \\ \frac{da_2}{dx} & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \frac{db}{dx} & c \\ a_1 & \frac{db_1}{dx} & c_1 \\ a_2 & \frac{db_2}{dx} & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & \frac{dc}{dx} \\ a_1 & b_1 & \frac{dc_1}{dx} \\ a_2 & b_2 & \frac{dc_2}{dx} \end{vmatrix}.$$

Remarque. — Si la nature du déterminant s'y prête mieux, rien n'empêchera de refaire ce calcul en raisonnant sur les lignes comme nous l'avons fait sur les colonnes.

Énoncé du théorème. — La dérivée d'un déterminant s'obtient en faisant la somme des déterminants obtenus en remplaçant successivement les éléments d'une même colonne (ou d'une même ligne) par leurs dérivées [1].

QUESTIONS PROPOSÉES

1. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ b & a & d & c \\ d & c & a & b \end{vmatrix}.$$

On trouve

$$(a-b)^2(a+b+c+d)(a+b-c-d).$$

---

(1) « Wenn alle Elemente des Systems sich ändern, so ist das vollständige Differential der Determinante

$$dR = \sum \frac{\partial R}{\partial a_{ik}} da_{ik} = \sum \alpha_{ik} da_{ik} \qquad (i,\ k = 1, 2, \ldots)$$

$$= \sum \alpha_{i1} da_{i1} + \sum \alpha_{i2} da_{i2} + \cdots \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

$$= \begin{vmatrix} da_{11} & a_{12} & a_{13}. \\ da_{21} & a_{22} & a_{23}. \\ da_{31} & a_{32} & a_{33}. \\ . & . & . \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & da_{12} & a_{13}. \\ a_{21} & da_{22} & a_{23}. \\ a_{31} & da_{32} & a_{33}. \\ . & . & . \end{vmatrix} + \cdots$$

die Summe von n Determinanten, die man aus R ableitet, indem man die Elemente je einer unter parallelen Reihen durch deren differentiale ersetzt. »

(Dr Richard Baltzer, *Theorie und Anwendung der Determinanten.*)

(Dans ce calcul, donné d'après Jacobi, α_{i1}, α_{i2}, ... sont les mineurs du déterminant R qui correspondent aux éléments a_{i1}, a_{i2}, ...)

2. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \alpha^n \\ b & \alpha & \alpha^{n+1} \\ c & \alpha^2 & \alpha^{n+2} \end{vmatrix}.$$

On trouve zéro.

3. Le déterminant suivant est égal à 1, quel que soit son ordre :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Le déterminant suivant a pour valeur 0 ou 1, suivant que n est impair ou pair :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Calculer la différence

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (x+1)^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & (x+1)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} & (x+1)^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \dots & C_{n+1}^{n-2} & C_{n+1}^{n-1} & (n+1)(x+1)^{n+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & 2 & \dots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & \dots & 0 & x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & \dots & C_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & \dots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}.$$

6. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Résultat :

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2.$$

Vérifier les formules suivantes :

7.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 16.$$

8. $$\begin{vmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} d-b' & b-b' \\ c-c' & a-a' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & c' & a' \\ b & d & d' & b' \\ b' & d' & d & b \\ a' & c' & c & a \end{vmatrix}.$$

9. $$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha' & \alpha\alpha' \\ 1 & \beta & \beta' & \beta\beta' \\ 1 & \gamma & \gamma' & \gamma\gamma' \\ 1 & \delta & \delta' & \delta\delta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B & B' \\ C & C' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & C' \\ A & A' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & A' \\ B & B' \end{vmatrix} = (\alpha'-\alpha)S,$$

où on a posé

$$A = (\beta-\gamma)(\alpha-\delta), \quad B = (\gamma-\alpha)(\beta-\delta), \quad C = (\alpha-\beta)(\gamma-\delta),$$
$$A' = (\beta'-\gamma')(\alpha'-\delta'), \quad B' = (\gamma'-\alpha')(\beta'-\delta'), \quad C' = (\alpha'-\beta')(\gamma'-\delta'),$$

avec

$$S = \begin{vmatrix} 1 & \alpha+\alpha' & \alpha\alpha' \\ 1 & \beta+\beta' & \beta\beta' \\ 1 & \gamma+\gamma' & \gamma\gamma' \end{vmatrix} = (\alpha-\beta')(\beta-\gamma')(\gamma-\alpha')+(\alpha'-\beta)(\beta'-\gamma)(\gamma'-\alpha).$$

10. $$\begin{vmatrix} a+x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & x_4 \end{vmatrix} = x_1x_2x_3x_4\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\frac{a_3}{x_3}+\frac{a_4}{x_4}\right).$$

11. $$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & h & g \\ b & h & 0 & f \\ c & g & f & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} (\sqrt{af}+\sqrt{bg}+\sqrt{ch})(-\sqrt{af}+\sqrt{bg}+\sqrt{ch}) \\ (\sqrt{af}-\sqrt{bg}+\sqrt{ch})(\ \ \sqrt{af}+\sqrt{bg}-\sqrt{ch}). \end{cases}$$

12. $$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & f & e \\ -b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad-be+cf)^2.$$

13. $$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & xx_1+yy_1+zz_1 \\ xx_1+yy_1+zz_1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & z \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}^2.$$

(Les sept questions précédentes se trouvent dans *Theorie und Anwendung der Determinanten.*)

14. $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1a_2a_3+b_2a_3a_1+b_3a_1a_2 & a_1b_2b_3+a_2b_3b_1+a_3b_1b_2 & b_1b_2b_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_4 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$
$$= (a_1b_2-b_1a_2)(a_1b_3-b_2a_3)(a_2b_4-b_1a_4)(a_2b_3-b_2a_3)(a_2b_4-b_2a_4)(a_3b_4-b_3a_4)$$

(G. DE LONGCHAMPS).

Développer les déterminants

15. $$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+u \end{vmatrix}.$$

16. $$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi & \cos\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\varphi & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\varphi & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

17. Les déterminants de la forme suivante sont nuls, pourvu que leur ordre soit au moins égal à 3 :

$$\begin{vmatrix} a^n - \alpha & a^{n+1} - \alpha & \ldots\ldots & a^{n+p-1} - \alpha \\ a^{n+p} - \alpha & a^{n+p+1} - \alpha & \ldots\ldots & a^{n+2p-1} - \alpha \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{n+(p-1)p} - \alpha & a^{n+(p-1)p+1} - \alpha & \ldots\ldots & a^{n+p^2-1} - \alpha \end{vmatrix}.$$

On pose

$$R_n = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

démontrer les trois formules suivantes :

18. $$\frac{\partial^{n-1} R_n}{\partial t_1 \partial t_2 \ldots \partial t_{n-1}} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, R_{n-1}.$$

19. $$f(t_1)^2 \frac{\partial}{\partial t_1}\left[\frac{R_n}{f(t_1)}\right] = \begin{vmatrix} -f'(t_1) & f(t_1) - t_1 f'(t_1) & \ldots & (n-1)t_1^{n-2} f(t_1) - t_1^{n-1} f'(t_1) \\ 1 & t_2 & \ldots & t_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_n & \ldots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

20. $$f'(t_1)^2 f(t_2)^2 \ldots f(t_n)^2 \frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \ldots \partial t_n}\left[\frac{R_n}{f(t_1) f(t_2) \ldots f(t_n)}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} -f'(t_1) & f(t_1) - t_1 f'(t_1) & \ldots & (n-1)t_1^{n-2} f(t_1) - t_1^{n-1} f'(t_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -f'(t_n) & f(t_n) - t_n f'(t_n) & & (n-1)t_n^{n-2} f(t_n) - t_n^{n-1} f'(t_n) \end{vmatrix}.$$

(Baltzer.)

21. α_{pq} étant le mineur correspondant à l'élément a_{pq} du déterminant, on a [1]

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots\ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots\ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}^{n-1}.$$

22. Vérifier l'identité

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_m \\ -1 & x & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & -1 & x & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \quad 0 \end{vmatrix} = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m.$$

(LAISANT.)

23. Soit un nombre, 17 par exemple, et 204, 527, 255 trois multiples quelconques de 17 ayant trois chiffres. On a

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \text{multiple de } 17.$$

(LAISANT.)

24. Les deux équations suivantes sont identiques :

$$\begin{vmatrix} a - lx & a' - ly & a'' - lz \\ b - mx & b' - my & b'' - mz \\ c - px & c' - py & c'' - pz \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & l & m & p \\ x & a & b & c \\ y & a' & b' & c' \\ z & a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

25. Prouver que $x - 2$ divise le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & \frac{l}{m} + \frac{m}{l} & \frac{n}{l} + \frac{l}{n} \\ \frac{l}{m} + \frac{m}{l} & x & \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \\ \frac{n}{l} + \frac{l}{n} & \frac{m}{n} + \frac{n}{m} & x \end{vmatrix}$$

et trouver le quotient. (*Mathesis.*)

26. Si on désigne par S_p^a la somme des produits p à p des quantités $a, b, c, \ldots, l$, sauf a, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ S_1^a & S_1^b & \ldots & \ldots & \ldots & S_1^l \\ S_2^a & S_2^b & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ a & b & \ldots & \ldots & \ldots & l \\ a^2 & b^2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

(*Nouvelles Annales.*)

---

(1) « Die Determinante des Systems der Adjuncten der n^2 Elemente eines gegebenen Systems ist die $(n-1)te$ Potenz der Determinante des Systems der Elemente. »
(BALTZER.)

27. Soit le tableau

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{Vmatrix}.$$

Les quatre déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 16 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$$

sont proportionnels à 1, 3, 3 et 1.

28. Plus généralement, les déterminants formés au moyen du tableau

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots & n \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \ldots\ldots & n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 1^{n-2} & 2^{n-2} & 3^{n-2} & 4^{n-2} & \ldots\ldots & n^{n-2} \end{Vmatrix},$$

en y supprimant, successivement, la $n^{ième}$ colonne, puis la $(n-1)^{ième}$, etc., sont proportionnels aux coefficients de $(x+1)^{n-1}$.

(LAISANT.)

29. « Étant donnés n objets $a, b, c, \ldots, l$, supposons que l'on ait formé le tableau de toutes les permutations telles que le premier rang, le deuxième, etc., ne puisse être occupé, dans chacune d'elles, que par *certains* de ces objets; et proposons-nous de déterminer le nombre X de ces permutations.

« Désignons, parmi les objets $a, b, c, \ldots, l$, par

$a_1, b_1, c_1, \ldots$ ceux qui peuvent occuper le premier rang,

$a_2, b_2, c_2, \ldots$ ceux qui peuvent occuper le deuxième rang,

et ainsi de suite.

« Formons maintenant le produit

$$(a_1 + b_1 + c_1 + \cdots)(a_2 + b_2 + c_2 + \cdots)\ldots(a_n + b_n + c_n + \cdots),$$

qui est évidemment une fonction entière et du degré n,

$$F(a, b, c, \ldots, l)$$

des lettres $a, b, c, \ldots, l$. »

Le résultat est $$X = \frac{d^n F(a, b, c, \ldots, l)}{da\, db\, dc \ldots dl}.$$

30. APPLICATION A UN PROBLÈME DE M. DE LONGCHAMPS. (Problème des *déterminants troués*.)

« Dans le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_n \end{vmatrix},$$

un certain nombre d'éléments venant à s'annuler, combien le déterminant Δ aura-t-il de termes?

« Il est clair qu'en formant les sommes des éléments de la première, de la deuxième colonne, etc., et en effectuant le produit après avoir supprimé les indices, nous aurons la fonction F ci-dessus qui nous donnera la solution cherchée.

« Le nombre des termes disparus sera $n! - X$. »

(LAISANT, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1891.)

31. Résoudre le système

$$\begin{aligned}
&\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \ldots + \alpha x_{n-1} + \beta x_n = X_n.\\
&\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \ldots + \beta x_{n-1} + \alpha x_n = X_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\beta x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \ldots + \alpha x_{n-1} + \alpha x_n = X_1.
\end{aligned}$$

Résoudre les systèmes d'équations suivants, étudiés par Rolle, 1690.

32. $\begin{cases} y = 2, \\ z = 1 + y, \\ u = 1 + z, \\ x = 6 - y - z. \end{cases}$

33. $\begin{cases} x + y = 5, \\ x + z = 6, \\ y + z = 7, \\ y + z + 2x = 11, \\ x + y + 2z = 13. \end{cases}$

34. $\begin{cases} 6u - 4y = 9z, \\ 12u - 15z = 10y, \\ 7z = 16y - 22y. \end{cases}$

35 $\begin{cases} u + x = 1, \\ u - z - x = z, \\ u + z + x = 4. \end{cases}$

36. $\begin{cases} x = 6 - y - z. \\ u = 1 + z, \\ z = 1 + y, \\ y = z. \end{cases}$

37. $\begin{cases} 19x - 5y - 13z = 35, \\ 2x + 3y - 7z = 3, \\ 11x + 17y + 23z = 141. \end{cases}$

38. $\begin{cases} y + z = 8, \\ y - 2z = 2. \\ 2y - z = 12. \end{cases}$

39. $\begin{cases} 2u + 3x + 4y + 5z = 40, \\ 3u + 4x + 5y + 6z = 50, \\ 4u + 5x + 6y + 7z = 60, \\ 5u + 6x + 7y + 8z = 70. \end{cases}$

On pose

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n).$$

Démontrer que :

40 Du système

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 + \ldots + x_n = 1\\
&x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n = t\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_1\alpha_1^{n-1} + \ldots + x_n\alpha_n^{n-1} = t_{n-1}
\end{aligned}\right\},$$

on déduit

$$x_i = \frac{f(t)}{(t-\alpha_i)f'(\alpha_i)}.$$

41. Du système

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_1^{n-1} = u_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2\alpha_n + \ldots + x_n\alpha_n^{n-1} = u_n \end{array}\right\},$$

on déduit

$$x_1 + x_2 z + \ldots + x_n z^{n-1} = \frac{u_1}{f'(\alpha_1)}\,\frac{f(z)}{z-\alpha_1} + \ldots + \frac{u_n}{f'(\alpha_n)}\,\frac{f(z)}{z-\alpha_n}.$$

Décomposer dans le nombre minimum de carrés de fonctions linéaires les expressions

42. $$2x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 4yz + 8zx - 6xy,$$

43. $$xy + yz + zx.$$

44. $$z^2 - 2xy.$$

45. $$(b^2+c^2)x^2 - \lambda(c^2+a^2)y^2 + (a^2+b^2)z^2 - 2bcyz - 2cazx - 2abxy.$$

46. $$x^2 + y^2 - z^2 - 2yz - 2zx + 2xy.$$

47. $$x^2 + y^2 - z^2 - 2xz - 2xy - 2yz.$$

48. $$(2x-y)^2 + (3y-x+z)^2 + (x+y+z)^2.$$

49. On considère la forme quadratique U,

$$\begin{aligned} U = {} & (x+2y+3z)^2 + (2x+3y+4z)^2 + \ldots \\ & + [nx + (n+1)y + (n+2)z]^2 \\ & - \frac{n(n-1)}{2(2n+1)}(y+2z)^2; \end{aligned}$$

démontrer que U est un carré parfait.

(G. DE LONGCHAMPS : *Algèbre.*)

Poser $$u_n = n(x+y+z) + (y+2z).$$

50. Soit $u = f(x_1, x_2, \ldots)$ une fonction homogène de plusieurs variables. Elle est définie par la relation

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots) = \lambda^m f(x_1, x_2, \ldots).$$

« Le degré de la fonction peut être positif ou négatif, entier, fractionnaire ou incommensurable. On pourrait même le supposer imaginaire ». Si on écrit symboliquement

$$u^{(p)} = [x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \ldots]^{(p)},$$

on a de plus

$$u^{(p)} = m(m-1)\ldots(m-p+1)f(x_1, x_2, \ldots).$$

Soit maintenant u une fonction homogène ou non, égale à une somme de fonctions $v, w, \ldots$ Démontrer

1° que $$u^{(p)} = v^{(p)} + w^{(p)} + \ldots;$$

2° que si on pose $u^{(p)} = \mathrm{U}$, on a

$$\mathrm{U}^{(1)} = (u^{(p)})^{(1)} = pu^{(p)} + u^{(p+1)}.$$

51. Déduire de là que « si une fonction est décomposable en une somme de p fonctions homogènes, il existe une relation linéaire identique entre cette fonction et les p premières fonctions $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}$ qu'on en déduit ». La réciproque de ce théorème est vraie.

(Laisant, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1892.)

52. Si $f(x)$ est un polynome entier en x, de degré n, le déterminant

$$\begin{vmatrix} nf & f' & f'' & \ldots\ldots & f^{(n-1)} \\ (n-1)f' & f'' & f''' & \ldots\ldots & f^{(n)} \\ (n-2)f'' & f''' & f^{\mathrm{IV}} & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f^{(n-1)} & f^{(n)} & 0 & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}$$

est une constante, quel que soit x.

Exemples :

2° degré $$\begin{vmatrix} 2f & f' \\ f' & f'' \end{vmatrix},$$

3° degré $$\begin{vmatrix} 3f & f' & f'' \\ 2f' & f'' & f''' \\ f'' & f''' & 0 \end{vmatrix},$$

. . . . . .

(Laisant, *Rendi Conti* du Cercle mathématique de Palerme, 1894.)

CHAPITRE VII

CONSTRUCTION DES COURBES DONT L'ÉQUATION EST RÉSOLUBLE PAR RAPPORT A UNE DES VARIABLES

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — *Discuter la fonction* $y = \mathrm{L}(x^2 - 3x + 2)$.

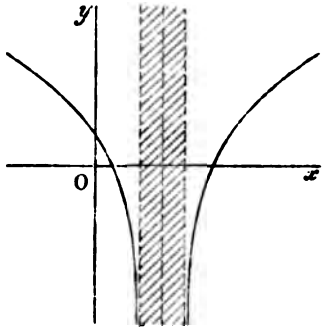
Pour que y soit réel, il faut que x varie entre $-\infty$ et 1, ou entre 2 et $+\infty$. On a

$$y' = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2};$$

x allant de $-\infty$ à 1, y va de $+\infty$ à $-\infty$ en décroissant constamment, puisque dans cet intervalle $y' < 0$. De même x allant de 2 à $+\infty$, y va de $-\infty$ à $+\infty$ en croissant, puisque $y' > 0$.

$$y \text{ est nul quand } x^2 - 3x + 2 = 1, \text{ d'où } x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2};$$

pour $x = 0$, $y = \mathrm{L}2 = 0{,}69$ environ.



La courbe représentative de la marche de la fonction a la forme ci-contre : elle est symétrique par rapport à la droite

$$x = \frac{3}{2}.$$

Points d'inflexion. — On a

$$y'' = \frac{2(x^2 - 3x + 2) - (2x - 3)^2}{(x^2 - 3x + 2)^2}.$$

Le numérateur égalé à 0 a ses racines imaginaires : il n'y a donc pas de points d'inflexion.

Remarque. — On peut obtenir aisément la forme de la courbe si on a l'idée de construire tout d'abord la parabole dont l'équation est

$$y_1 = x^2 - 3x + 2.$$

On pourra encore écrire l'équation de la courbe ainsi :

$$y = \mathrm{L}(x-1) + \mathrm{L}(x-2),$$

si x varie par des valeurs > 2, ou bien

$$y = \mathrm{L}(1-x) + \mathrm{L}(2-x),$$

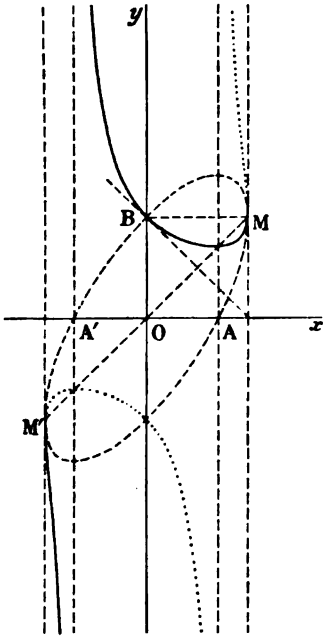
si x prend des valeurs < 1.

Question II. — *Discuter la fonction*

$$y = \frac{1}{x \pm \sqrt{1-x^2}}.$$

Pour que y soit réel, il faut que x varie entre -1 et $+1$.

Prenons d'abord $\quad y_1 = \dfrac{1}{x + \sqrt{1-x^2}}$,



d'où $\quad y'_1 = -\dfrac{1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{(x+\sqrt{1-x^2})^2}$;

y'_1 s'annule en changeant de signe pour

$$1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

d'où $\quad x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

la valeur correspondante de y est aussi $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. y'_1 passant d'ailleurs du négatif au positif, ces valeurs répondent à un minimum.

y_1 devient infini pour

$$x + \sqrt{1-x^2} = 0,$$

d'où $\quad x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Faisons varier x de -1 à $+1$:

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
y	-1	décr.	$\mp\infty$	décr.	1	décr.	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ minimum.	croît	1

Cette première portion de la courbe est figurée en trait plein. Pour $x = \pm 1$, la dérivée y'_1 est infinie : ainsi en M et M' les tangentes à la courbe sont parallèles à Oy. Pour $x = 0$, $y' = -1$: ainsi en B la tangente est parallèle à la bissectrice de yOA'.

La seconde portion de la courbe, définie par l'équation

$$y_2 = \frac{1}{x - \sqrt{1 - x^2}},$$

est symétrique de la première par rapport à O.

Remarque. — On obtiendrait facilement la forme de la courbe proposée au moyen de l'ellipse

$$y_3 = x \pm \sqrt{1 - x^2},$$

que nous avons représentée sur la figure.

Question III. — *Discuter la fonction* $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 + 3x - 2}$. (Cirodde, *Géométrie analytique.*)

x variant de $-\infty$ à $+\infty$, y est toujours réel et sa dérivée est

$$y' = 3\,\frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x^3 + 3x - 2)^2}.$$

y' s'annule pour les racines de l'équation

$$\varphi(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1 = 0;$$

étudions cette équation :

1° Le théorème de Descartes montre que $\varphi(x) = 0$ a une seule racine positive, puisque son premier membre ne présente qu'une variation ; d'autre part,

$$\varphi(-x) = -2x^3 - 3x^2 - 1$$

ne présentant aucune variation, $\varphi(-x) = 0$ n'a aucune racine positive. Ainsi, $\varphi(x) = 0$ a une seule racine réelle : on trouve par des substitutions que la valeur α de cette racine est comprise entre 1,6 et 1,7, la valeur de y correspondante étant environ 0,7 ;

2° On peut dire aussi, en appliquant le théorème des lacunes, qu'il manque dans $\varphi(x) = 0$ un terme compris entre deux autres de même signe. Donc il y a deux racines imaginaires.

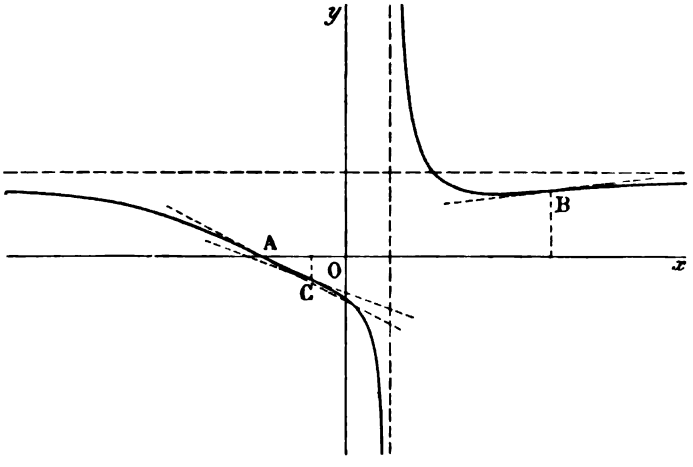
Pour $x = \alpha$, y' passe du négatif au positif : cette valeur correspond donc à un minimum. Il n'y a pas lieu de s'occuper du dénominateur de y', qui conserve un signe constant.

y s'annule pour $x^3 + 1 = 0$, d'où $x = -1$, seule racine réelle.

Il devient infini lorsque

$$x^3 + 3x - 2 = 0\,;$$

cette équation admet une seule racine réelle, qui est positive : il suffit pour s'en assurer d'appliquer un des deux caractères précédents.



La valeur β de la racine est comprise entre 0,5 et 0,6.

Faisons varier x de $-\infty$ à $+\infty$.

x	$-\infty$		-1		β		α		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
y	1	$+$ décr.	0	$-$ décr.	$\mp\infty$	$+$ décr.	minim.	$+$ cr.	1

La courbe représentative de la marche de la fonction affecte la forme ci-dessus.

Cherchons si la courbe admet des points d'inflexion, et à cet effet calculons y'' :

$$\frac{y''}{18} = \frac{(x^3 + 3x - 2)(x^2 - x) - (2x^3 - 3x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x^3 + 3x - 2)^3}$$

$$= \frac{-x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x + 1}{(x^3 + 3x - 2)^3}.$$

Le numérateur s'écrit $-(x^3 + 1)(x^2 - 2x - 1)$. Il s'annule pour $x' = -1$, pour $x'' = 1 - \sqrt{2}$ et pour $x''' = 1 + \sqrt{2}$.

Pour $x = -1$, $y = 0$. Cherchons à calculer simplement les valeurs de y quand on fait $x = x''$ ou $x = x'''$. Divisons les deux termes de y par $x^2 - 2x - 1$: nous avons pour restes, respectivement, $5x + 3$ et $8x$; ainsi, pour les valeurs de x que nous consi-

dérons, y devient

$$\frac{5x+3}{8x} = \frac{1}{8}\left(5+\frac{3}{x}\right);$$

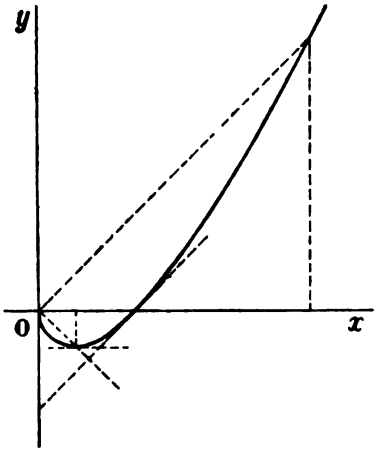
pour $\quad x = x'', \quad y = \dfrac{2-3\sqrt{2}}{8}, \qquad$ C

pour $\quad x = x''', \quad y = \dfrac{2+3\sqrt{2}}{8}. \qquad$ B

Les coordonnées des trois points d'inflexion A, C, B sont ainsi déterminées. La courbe coupe la droite $y = 1$ au point d'abscisse 1.

Question IV. — *Construire la courbe représentée par l'équation*

$$y = x\mathrm{L}x.$$



Pour que y soit réel, il faut que x soit positif.

La dérivée $y' = \mathrm{L}x + 1$ s'annule en passant du négatif au positif pour $x = \dfrac{1}{e}$.

x	0		$\frac{1}{e}$		1		e		$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	1	$+$	2	$+$	
y	0	$-$	$-\frac{1}{e}$ minimum.	$-$	0	$+$	e	$+$	$+\infty$

Il n'y a pas d'asymptote, car

$$\lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = \infty.$$

Question V. — *Construire la courbe représentée par l'équation*

$$y = \frac{(x-1)^2}{x^3+9x-9}.$$

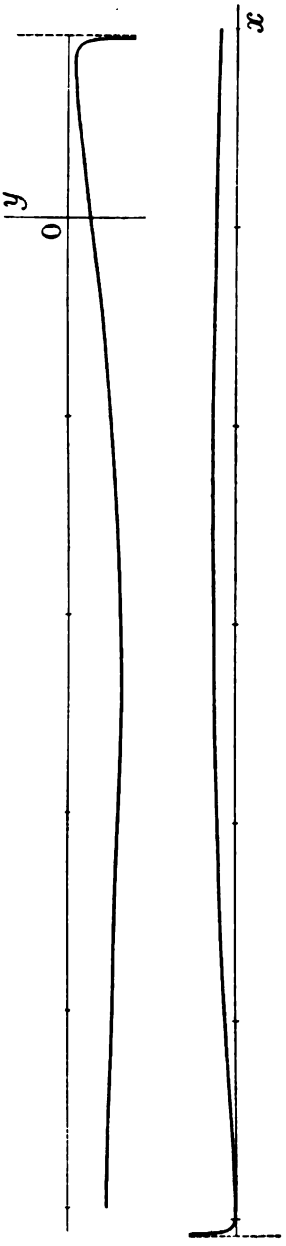
(*École Polytechnique : examen écrit.*)

Nous avons

$$y' = \frac{(x-1)(-x^3+3x^2+9x-9)}{(x^3+9x-9)^2}.$$

y' s'annule en changeant de signe, d'abord pour $x = 1$; et ensuite, ainsi qu'on le voit par des substitutions, pour une valeur α de x comprise entre -2 et -3, une β entre 0,8 et 0,9, une γ entre 4 et 5.

y s'annule pour $x = 1$, et devient infini pour une valeur δ de x



comprise entre 0,9 et 1. Nous pouvons dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$		α		β		δ		1		γ		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	∞	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	—décr.	min.	—cr.	max.	—décr.	$\mp\infty$	+décr.	min.	+cr.	max.	décr.	0

La courbe affecte la forme que nous représentons à la page 101.

Les points d'inflexion s'obtiennent en égalant à zéro la fonction

$$y'' = \frac{x(2x^5 - 12x^4 - 42x^3 + 162x^2 - 162x + 54)}{(x^3 + 9x - 9)^3},$$

qui s'annule pour $x = 0$, et pour des valeurs de x comprises, respectivement, entre 1 et 2, 7 et 8, -4 et -5.

Question VI. — *Construire la courbe représentée par l'équation*

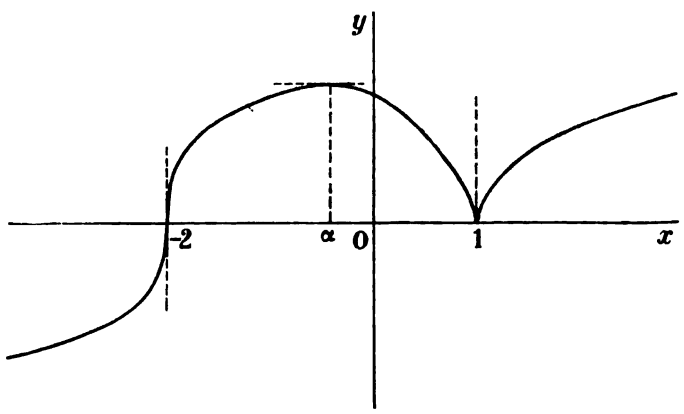
$$y = \sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 1}}.$$

On a $$y' = \left(\frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 1}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{x^4 + 6x^2 - 4x - 3}{(x^2 + 1)^4}.$$

Soit $\varphi(x) = x^4 + 6x^2 - 4x - 3 = (x - 1)(x^3 + x^2 + 7x + 3)$,

et $$\psi(x) = x^3 + x^2 + 7x + 3.$$

L'équation $\psi'(x) = 0$ ayant ses racines imaginaires, l'équation $\psi(x) = 0$ a une seule racine réelle α : elle est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$.



D'autre part, on a

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2),$$

et y' s'écrit :

$$y' = \frac{1}{(x - 1)^{\frac{1}{3}}(x + 2)^{\frac{2}{3}}} \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{(x^2 + 1)^{\frac{10}{3}}}.$$

On peut alors dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		α		0		1		$+\infty$
y'		$+$	∞	$+$	0	$-$			∞	$+$	
y	$-\infty$	$-$	0	$+$	max.	$+$	$\sqrt[3]{2}$	$+$	0 rebrousst	$+$	$+\infty$

Il n'y a pas d'asymptotes : la courbe affecte la forme figurée page 102.

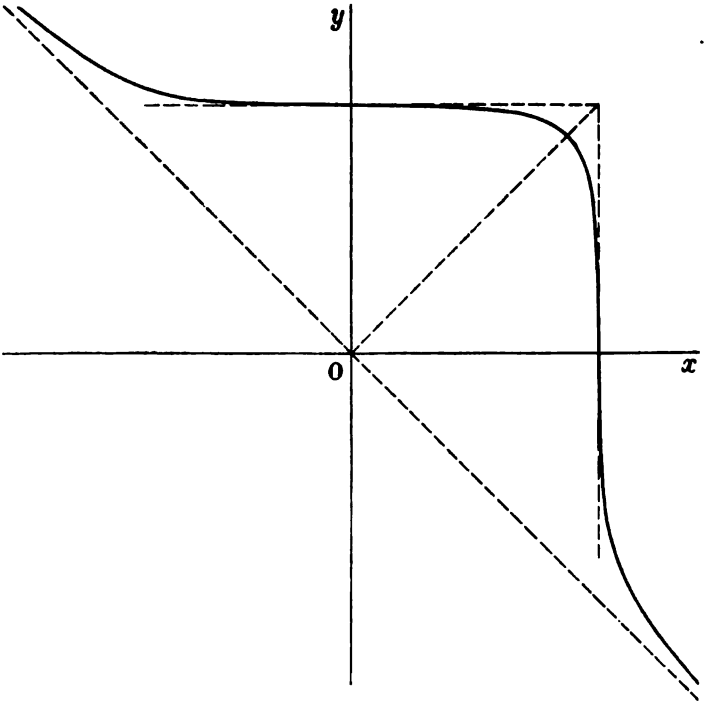
Question VII. — *Construire la courbe représentée par l'équation*

$$y^5 + x^5 = 1.$$

Nous tirons de là $\qquad y = \sqrt[5]{1 - x^5}.$

y est réel quel que soit x; sa dérivée,

$$y' = \frac{-5x^4}{(1 - x^5)^{\frac{4}{5}}},$$



est négative, ainsi la fonction est continuellement décroissante. Nous voyons sur l'équation donnée que la droite $y + x = 0$ est asymptote

à la courbe, et que celle-ci est symétrique par rapport à la droite $y = x$.

La courbe part-elle au-dessus ou au-dessous de son asymptote ? Nous pouvons remarquer qu'elle ne coupe pas celle-ci, et que par suite elle est tout entière du même côté de cette droite : il est clair que c'est au-dessus.

Autremeut. — Nous avons

$$y = \sqrt[5]{1 - x^5} = -x + \frac{1}{5}\frac{1}{x^4} + \frac{2}{25}\frac{1}{x^9} + \frac{6}{125}\frac{1}{x^{14}} + \cdots;$$

la différence entre l'ordonnée de la courbe et celle de l'asymptote est donc

$$\frac{1}{x^4}\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{25}\frac{1}{x^5} + \frac{6}{125}\frac{1}{x^9} + \cdots\right),$$

qui a le signe plus pour $x = \pm\infty$.

Les points de rencontre de la courbe avec les axes sont des points d'inflexion ; les tangentes en ces points forment un carré avec les axes de coordonnées.

Question VIII. — *Construire la courbe représentée par l'équation*

$$y^4 - 2y^2 + x^4 - x^3 - x^2 + 1 = 0.$$

Posons $y^2 = z$; cette équation devient

$$z^2 - 2z + x^4 - x^3 - x^2 + 1 = 0,$$

d'où
$$z = 1 \pm \sqrt{-x^4 + x^3 + x^2},$$

expression qui sera réelle si

$$-x^4 + x^3 + x^2 \geqslant 0,$$

ce qui entraîne

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Le produit des racines de l'équation en z est

$$x^4 - x^3 - x^2 + 1 = (x - 1)(x^3 - x - 1).$$

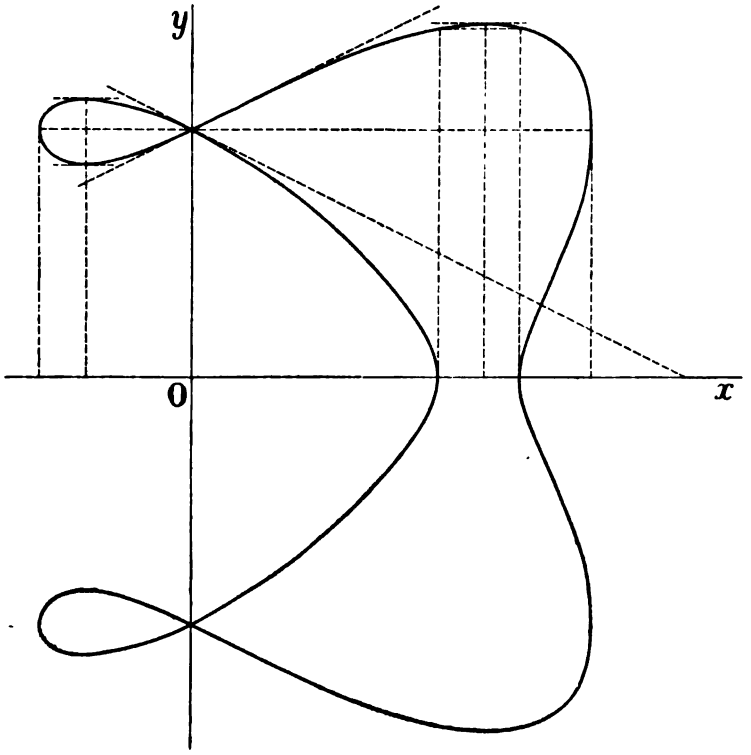
Or l'équation
$$x^3 - x - 1 = 0,$$

où la quantité $4p^3 + 27q^2$ est positive, admet une seule racine réelle α. Cette racine est comprise entre 1,3 et 1,4. D'autre part la somme des racines étant positive, l'équation en z admettra deux racines positives quand x variera entre $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et 1, ou entre α et $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; une seule quand x variera entre 1 et α.

Posons

$$y_1 = +\sqrt{1+\sqrt{-x^4+x^3+x^2}}, \qquad y_2 = +\sqrt{1-\sqrt{-x^4+x^3+x^2}};$$

y_1 sera réel pour toute valeur de x comprise entre $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et



$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y_2 seulement pour des valeurs de x comprises entre $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et 1, α et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nous avons d'autre part :

$$y'_1 = \frac{-4x^3+3x^2+2x}{2\sqrt{-x^4+x^3+x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{-x^4+x^3+x^2}}},$$

expression qui s'annule pour $x=0$, et pour les valeurs de x racines de l'équation

$$4x^2-3x-2=0,$$

qui admet une racine β entre $1,1$ et $1,2$, et une γ entre $-0,4$ et $-0,3$. Pour $x=0$, y'_1 se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, mais il est

clair que si x passe par 0 en allant du négatif au positif, y'_1 passe brusquement de $-\frac{1}{2}$ à $+\frac{1}{2}$.

y'_2 s'annule pour les mêmes valeurs que y'_1 : il n'y aura pas à tenir compte de la valeur β, qui est comprise entre 1 et α.

Ces considérations permettent de dresser le tableau suivant, où N désigne le nombre des racines positives de l'équation en z :

x	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		γ		0		1		β		α		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
N		2		2		2		1		1		2	
y'_1	$+\infty$	+	0	−	$\mp\frac{1}{2}$	+		+	0	−		−	$-\infty$
y_1	1	cr.	max.	décr.	1	cr.		cr.	max.	décr.		décr.	1
y'_2	$+\infty$	−	0	+	$\pm\frac{1}{2}$	−	$-\infty$				$+\infty$	+	$+\infty$
y_2	1	décr.	min.	cr.	1	décr.	0				0	cr.	1

Le point ayant pour coordonnées 0 et 1 est double ; pour $x = 1$ ou $x = \alpha$, on a $y_1 = \sqrt{2}$. La courbe a la forme que nous représentons, en la complétant par la partie symétrique par rapport à Ox.

Question IX. — *Construire la courbe représentée par l'équation*

$$y = \frac{1}{x} \pm \sqrt{1 - \frac{1}{x}}.$$

Il faut, pour que y soit réel, que x soit plus petit que 0 ou plus grand que 1. Posons

$$y_1 = \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \quad (1), \qquad y_2 = \frac{1}{x} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \quad (2),$$

$$y_3 = \frac{1}{x} \quad (3), \qquad y_4 = \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \quad (4), \qquad y_5 = -\sqrt{1 - \frac{1}{x}} \quad (5).$$

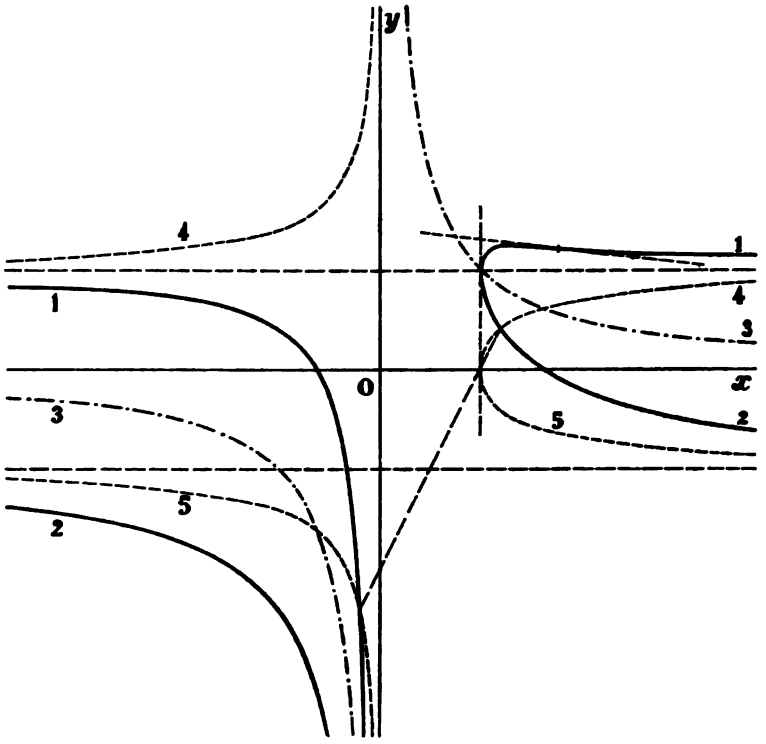
La courbe (3) est une hyperbole équilatère. Il est facile de construire la courbe (4) : si x varie de $-\infty$ à $+\infty$, y_4 prend les valeurs suivantes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y_4	1	cr.	$+\infty$		0	cr.	1

Nous représentons ces courbes (3) et (4), ainsi que la courbe (5), qui se déduit de cette dernière.

Nous obtenons les courbes (1) et (2), en faisant pour chaque valeur

de x la somme des ordonnées des courbes (3) et (4) d'une part, (3) et (5) de l'autre. Il n'y a de difficultés que pour la courbe (1), lorsque $x = -\infty$ ou $x = 0$.



Pour $x = -\infty$, $y = 1$, mais il est impossible de voir sur la figure si la courbe part au-dessus ou au-dessous de la droite $x = 1$. La quantité $1 - y_1$ s'écrit

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x}}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 1\right),$$

qui est positive lorsque x tend vers $-\infty$; ainsi la courbe part au-dessous de son asymptote. Le développement en série conduit au même résultat : De

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} \cdots,$$

nous déduisons

$$\frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} \cdots.$$

Ainsi $y_1 - 1$ a le signe de $\frac{1}{2x}$ pour x infini.

Lorsque x tend vers 0 par des valeurs négatives, y_1 se présente sous la forme $\infty - \infty$. Nous écrivons alors

$$y_1 = \frac{1}{x}\left(1 + \sqrt{x^2 - x}\right),$$

qui tend vers $-\infty$. Nous pouvons remarquer également que $\frac{1}{x}$ est infiniment grand du premier ordre, et $\sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ d'ordre $\frac{1}{2}$, x étant l'infiniment petit principal. La courbe a donc la forme générale que nous indiquons page 107.

Formons la dérivée de y_1 :

$$y'_1 = \frac{1 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{2x^2\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}.$$

Son dénominateur conserve un signe constant, son numérateur s'annule, en passant du négatif au positif, pour $x = \frac{4}{3}$, d'où $y_1 = \frac{5}{4}$. Donc, x allant de $-\infty$ à 0, y_1 décroît ; x allant de 1 à $\frac{4}{3}$, y_1 croît et passe par un maximum, pour décroître ensuite lorsque x va de $\frac{4}{3}$ à $+\infty$.

Il est clair que y'_2 est constamment négative : ainsi la fonction y_2 est toujours décroissante, ce qui était prévu.

La forme de la courbe indique qu'il y a au moins un point d'inflexion: pour le vérifier, égalons à 0 la dérivée seconde de y :

de
$$y' = -\frac{1}{x^2} \pm \frac{1}{2x^2\sqrt{1 - \frac{1}{x}}},$$

nous déduisons

$$y'' = \frac{2}{x^3} \pm \frac{1}{2x^4\left(1 - \frac{1}{x}\right)}\left[\frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} + 2x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right]$$
$$= \frac{2}{x^3}\left(1 \pm \frac{4x - 3}{8x^4\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}\right);$$

égalons à 0 la quantité entre crochets, nous trouvons :

$$f(x) = 48x^3 - 168x^2 + 183x - 64 = 0.$$

Le théorème de Descartes montre que cette équation n'a aucune racine négative, d'ailleurs $f(1)\,f(\infty) < 0$, donc il y a entre 1 et $+\infty$ une ou trois racines réelles. Il n'y en a qu'une, car la dérivée

$$f'(x) = 144x^2 - 336x + 183 = 0$$

a ses racines imaginaires. Il y a donc un seul point d'inflexion.

Question X. — *Construire la courbe représentée par l'équation*

$$y = x^2 \pm \sqrt[2]{x^{15}}.$$

L'équation $y = x^2$ représente une parabole, diamètre de notre courbe pour les cordes parallèles à Oy. Il faut supposer x positif.

La courbe passe en O, et comme

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = \lim x(1 \pm \sqrt[2]{11}) = 0,$$

elle est tangente en ce point à Ox.

D'autre part,

$$\lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = \infty\,;$$

ainsi il n'y a de direction asymptotique que suivant une parallèle à Oy, autrement dit ici il n'y a pas d'asymptote.

La fonction

$$y_1 = x^2 + \sqrt[2]{x^{15}}$$

croît constamment de 0 à ∞ ;

la fonction

$$y_2 = x^2 - \sqrt[2]{x^{15}} = x^2(1 - \sqrt[2]{x^{11}})$$

s'annule pour $x = 1$, et admet pour dérivée

$$y_2' = 2x - \frac{15}{2} x^{\frac{13}{2}},$$

qui s'annule pour

$$x = \left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{2}{11}}.$$

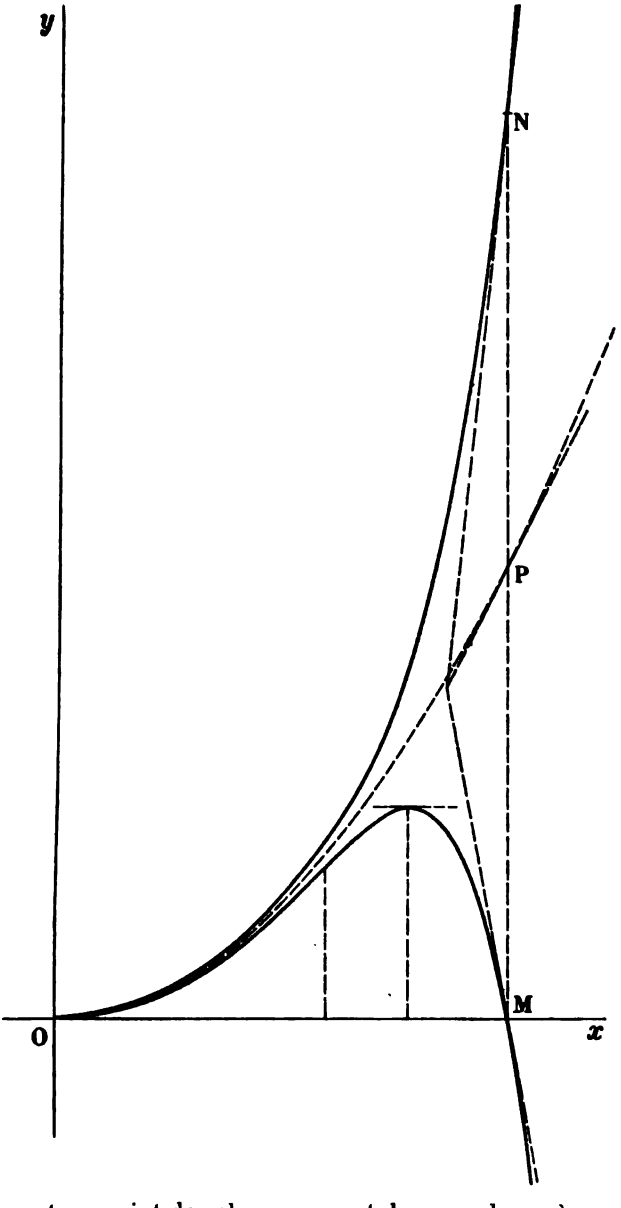
Ainsi la fonction y_2 croît jusqu'à un maximum correspondant à $x = \left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{2}{11}}$, pour décroître ensuite jusqu'à $-\infty$.

La forme de la courbe est celle que nous représentons page 110; on devine la présence d'un point d'inflexion : la dérivée seconde

$$y_2'' = 2 - \frac{15 \times 13}{4} x^{\frac{11}{2}}$$

s'annule en effet pour

$$x = \left(\frac{8}{15 \times 13}\right)^{\frac{2}{11}}.$$

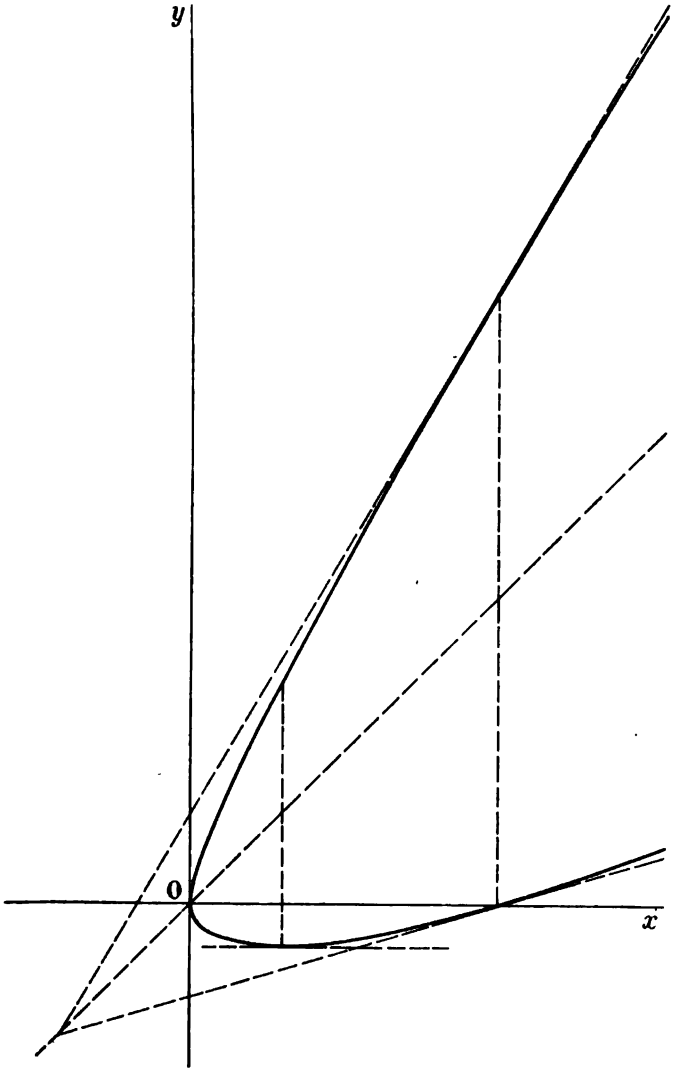


L'origine est un point de rebroussement de seconde espèce.

Remarque. — Soient M et N deux points de la courbe ayant même abscisse, P le point correspondant du diamètre : les trois tangentes en M, N et P sont concourantes. Cette remarque s'applique à toutes les courbes à diamètres.

Question XI. — *Construire la courbe représentée par l'équation*

$$y = x \pm \sqrt[10]{x^7}.$$



$y = x$ représente un diamètre de la courbe ; il est nécessaire, pour que y soit réel, que x soit positif.

La courbe passe à l'origine : elle est tangente en ce point à Oy, car

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = \lim_{x=0} \left(1 \pm \sqrt[10]{\frac{1}{x^3}}\right) = \infty .$$

Il y a une direction asymptotique déterminée par

$$\lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = 1,$$

mais point d'asymptote, car

$$\lim_{x=\infty} (y - x) = \infty .$$

Considérons

$$y_1 = x + \sqrt[10]{x^7} :$$

cette fonction croît constamment. Ensuite la fonction

$$y_2 = x - \sqrt[10]{x^7}$$

admet comme dérivée

$$y'_2 = 1 - \frac{7}{10} \sqrt[10]{\frac{1}{x^3}},$$

et pour l'étudier nous dressons le tableau suivant :

x	0		$\left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{10}{3}}$		1		$+\infty$
y'_2	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\frac{3}{10}$	$+$	
y_2	0	$-$ décr.	min.	$-$ cr.	0	$+$ cr.	$+\infty$.

Pour $x = \infty$, $y = x\left(1 - \sqrt[10]{\frac{1}{x^3}}\right) = \infty$.

Il n'y a pas de points d'inflexion. L'axe Oy a avec la courbe un contact du septième ordre.

Question XII. — *Construire la courbe représentée par l'équation*

$$y = x \pm \sqrt{\frac{x^3 - 2x + 1}{x + 1}}.$$

Les valeurs de y sont réelles si la quantité sous le radical est positive. Or les racines de l'équation

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

sont 1 et $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Ainsi il n'y aura pas de points de la courbe répondant à des abscisses comprises entre $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et -1, non plus qu'entre $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $+1$.

La droite $y = x$ est un diamètre de la courbe : elle rencontre celle-ci aux trois points B, D, A. En ces points la tangente est verticale, ainsi que l'indique le calcul de y'.

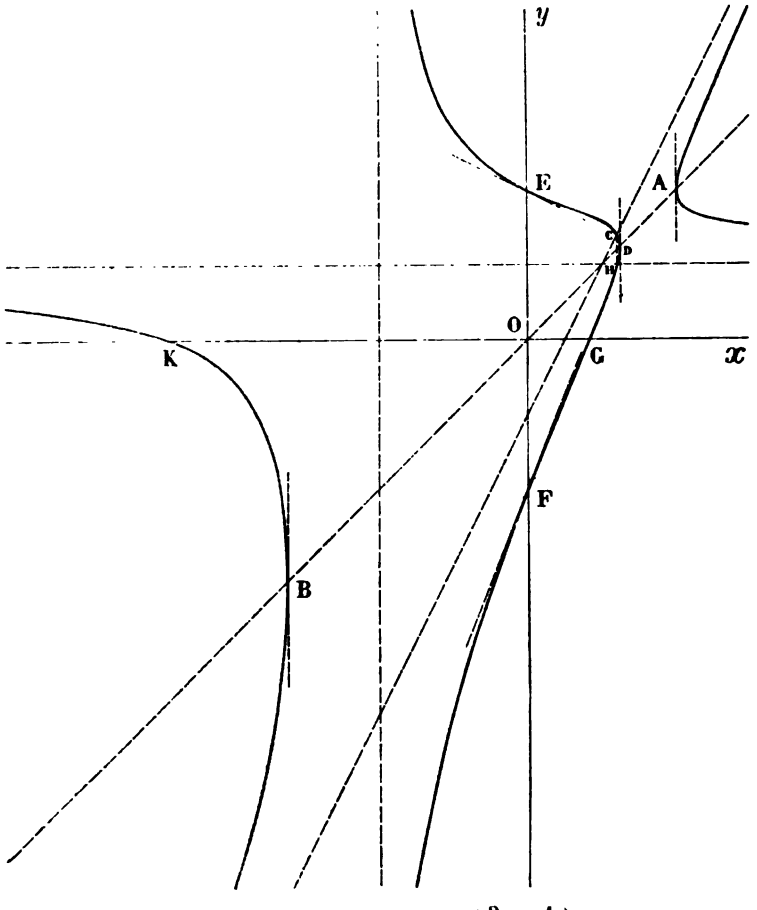
Il y a une première asymptote évidente $x = -1$. Les deux autres ont pour équations

$$y = \frac{1}{2}$$

et

$$y = 2x - \frac{1}{2}.$$

Chaque asymptote coupe la courbe en deux points à l'infini ; la



deuxième la rencontre de plus au point $H\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{2}\right)$, la troisième au point $C\left(\frac{3}{5}, \frac{7}{10}\right)$, la troisième en un point situé aussi à l'infini.

D'après un théorème connu, ces trois points sont en ligne droite; autrement dit ici la ligne qui joint les points H et C est parallèle à la première asymptote.

L'équation d'une cubique ayant trois asymptotes réelles s'écrit d'ailleurs

$$PQR + S = 0,$$

$P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ étant les équations des asymptotes et $S = 0$ celle de la droite qui joint les troisièmes points de rencontre de la courbe avec ses asymptotes. Ici elle prend la forme

$$(x+1)(2y-1)(2y-4x+1)+5x-3=0.$$

La courbe rencontre l'axe des x aux points G et K, d'abscisses $-1 \pm \sqrt{2}$; l'axe des y aux points E et F, d'ordonnées ± 1. En ces deux derniers points les tangentes ont respectivement pour coefficients angulaires $-\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$; remarquons, et ceci est général, qu'elles se coupent sur le diamètre AB.

Ces considérations suffisent pour construire la courbe.

Question XIII. — *Construire la courbe représentée par l'équation*

$$y = \pm\sqrt{x^2-3x+2} \pm \sqrt{x^2-4x+5}.$$

L'ordonnée de la courbe est la somme algébrique des ordonnées de deux hyperboles équilatères. Cette remarque permet de la construire: elle est symétrique par rapport à Ox.

Il n'y a pas d'asymptotes parallèles à Oy. Prenons la détermination

$$y_1 = \sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+5}.$$

Nous avons, pour $x = \infty$,

$$\lim \frac{y_1}{x} = 2,$$

et

$$\begin{aligned}\lim (y_1 - 2x) &= \lim \left[\sqrt{x^2-3x+2}-1\right] + \lim \left[\sqrt{x^2-4x+5}-1\right] \\ &= \lim \frac{-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+2}+1} + \lim \frac{-4x+5}{\sqrt{x^2-4x+5}+1} \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi nous trouvons une asymptote

$$y = 2x - \frac{7}{2}.$$

Prenons la détermination

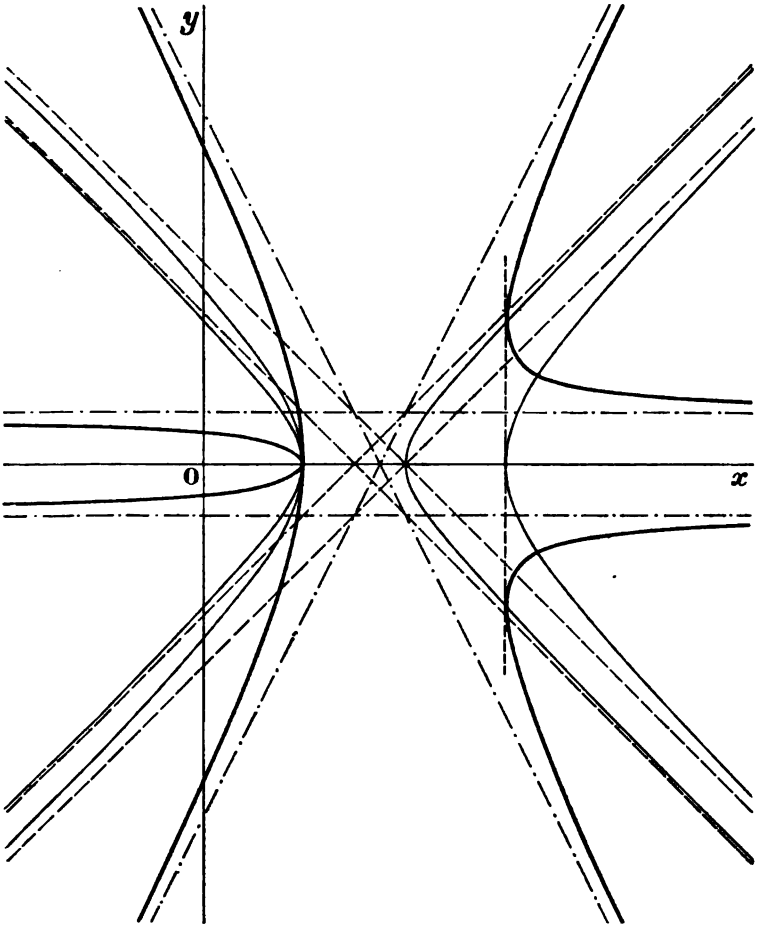
$$y_2 = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 - 4x + 5}.$$

Ici
$$\lim \frac{y_2}{x} = 0,$$

et
$$\lim y_2 = \lim \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{1}{2},$$

ce qui nous donne une seconde asymptote

$$y = \frac{1}{2}.$$



Il y a deux autres asymptotes, symétriques de celles-ci par rapport à Ox.

Question XIV. — *Asymptotes de la courbe*

$$y = \frac{3x^5 - 5x^4 + 2x^2 - 3x + 1}{x^4 - 2x^3 + x - 1} = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}.$$

Asymptotes non parallèles à Oy. — Effectuons la division du numérateur de y par son dénominateur :

$$y = 3x + 1 + \frac{2}{x} + \frac{\varepsilon}{x}. \quad (\varepsilon \text{ ayant pour limite } 0.)$$

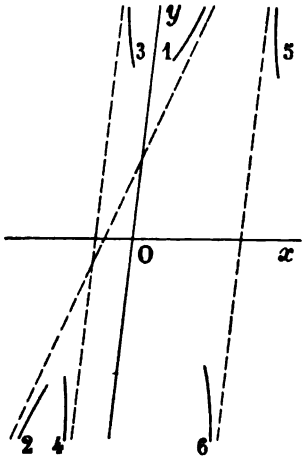
L'équation de l'asymptote est $y_1 = 3x + 1$, et le signe de la différence $(y - y_1)$ pour x très grand est le même que celui de $\frac{2}{x}$. Ainsi, pour $x > 0$ la courbe est au-dessus de l'asymptote (branche 1) ; pour $x < 0$ elle est au-dessous (branche 2).

Asymptotes parallèles à Oy. — L'équation

$$\varphi(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1 = 0$$

a deux racines réelles (appliquer le théorème de Sturm), l'une positive, comprise entre $\frac{3}{2}$ et 2, l'autre négative, comprise entre -1 et $-\frac{3}{4}$. Ces racines sont incommensurables : je désigne la première par b et la deuxième par a ; elles sont simples, et à chacune d'elles vont correspondre des branches de courbe réelles.

Nous sommes conduits à poser $x - a = \frac{k}{y^\alpha}$, et en déterminant α par la condition que k tende vers une limite finie et non nulle quand y augmente indéfiniment, nous avons



$$x - a = \frac{\varphi_1(a)}{\varphi'(a)} \frac{1}{y}.$$

Or $\varphi_1(x)$ s'écrit

$$\varphi_1(x) = (x^4 - 2x^3 + x - 1)(3x + 1) + 2x^3 - x^2 + x + 2,$$

et le signe de la substitution dans ce polynome de a ou de b à x sera le même que dans

$$\chi(x) = 2x^3 - x^2 + x + 2.$$

$\chi(x) = 0$ a une seule racine réelle [théorème de Rolle : $\chi'(x) = 0$ a ses racines imaginaires] comprise entre 0 et $-\frac{3}{4}$, donc :

$$\left.\begin{array}{l}\chi'(a) < 0,\\ \chi'(b) > 0,\end{array}\right\} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l}\varphi_1(a) < 0,\\ \varphi_1(b) > 0.\end{array}\right.$$

De même $\varphi'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1 = (2x-1)(2x^2 - 2x - 1)$: il est visible que les 3 racines de $\varphi'(x) = 0$ sont comprises entre a et b, donc

$$\varphi'(a) < 0,$$

et

$$\varphi'(b) > 0.$$

Enfin, pour des valeurs de $y > 0$, $x - a > 0$ (branche 3),
— — $y < 0$, $x - a < 0$ (— 4),
— — $y > 0$, $x - b > 0$ (— 5),
— — $y < 0$, $x - b < 0$ (— 6).

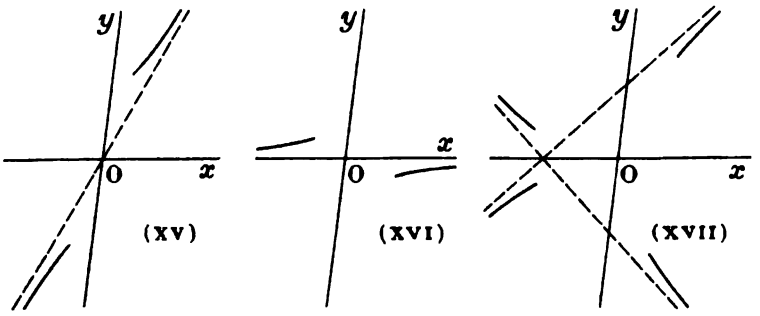
Les asymptotes et la courbe ont la disposition indiquée page 116.

Question XV. — *Asymptotes de* $y = \sqrt[3]{x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 1}$.

En extrayant les racines, l'équation prend la forme

$$y = x - \frac{1}{3x^2} + \frac{\varepsilon}{x^2} + x + \frac{1}{2x} + \frac{\varepsilon_1}{x}.$$

(ε et ε_1 tendant vers zéro),
$y = 2x$ est une asymptote : les dispositions relatives de la courbe et de l'asymptote sont indiquées par le signe de $\frac{1}{2x}$.



Question XVI. — *Asymptotes de* $y = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}$.

$$y = x - \frac{1}{2x} + \frac{\varepsilon}{x} - \left(x + \frac{1}{2x} + \frac{\varepsilon_1}{x}\right) = -\frac{1}{x} + \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{x}.$$

L'axe des x est asymptote; la courbe est au-dessus ou au-dessous de son asymptote suivant que x est < 0 ou > 0.

Question XVII. — *Asymptotes de* $y = \pm x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

Cherchons $\lim \frac{y}{x}$ pour x infini : c'est évidemment ± 1. Pour la première direction asymptotique,

$$\lim (y - x) = \lim \frac{\frac{-2x}{x+1}}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1} = -1 ;$$

la première asymptote est donc $y - x + 1 = 0$: la courbe est au-dessous d'elle pour $x > 0$ comme pour $x < 0$, car $\frac{-2x}{x+1}$ est toujours < 0 si x est très grand.

Pour la seconde asymptote, on se servira de ce que la courbe est symétrique par rapport à Ox.

Question XVIII. — Remarques sur la construction de certaines courbes.

Nous nous proposons de construire la tangente en un point d'une courbe dont l'équation est

$$y = f(x) + \varphi(x).$$

Considérons sur une même parallèle à Oy (les axes sont supposés rectangulaires) trois points A, B et M appartenant respectivement aux courbes f, φ et y. De l'équation donnée nous tirons

$$y' = f'(x) + \varphi'(x).$$

Ainsi le coefficient angulaire de la tangente en M est la somme algébrique des coefficients angulaires des tangentes en A et en B. Nous en déduisons la construction suivante :

La tangente en M coupe Ox en T ; l'ordonnée de ce point rencontre en K la tangente en B, et KM est la tangente cherchée.

Donc, si nous savons construire, au moyen de la règle et du compas, les tangentes en A et en B, nous pourrons obtenir de même la tangente en M.

Ensuite, de l'équation donnée nous tirons encore

$$\int y dx = \int f(x) dx + \int \varphi(x) dx,$$

et si nous voulons obtenir l'aire comprise entre Ox, deux ordonnées et la courbe y, cette formule simple nous le permettra, sans adjonction de constante, au moyen des aires des deux courbes f et φ.

Si l'équation de la courbe est de la forme

$$y = f(x) \pm \varphi(x),$$

soit M′ le second point de la courbe situé sur la même ordonnée que M. Les tangentes en M et en M′ sont concourantes avec la tangente en B à la courbe, et s'obtiennent comme il vient d'être dit.

Il est facile d'établir géométriquement ces propositions, et de les généraliser pour une courbe dont l'ordonnée est la somme algébrique des ordonnées de différentes autres courbes.

Question XIX. — *Sur la courbe* $Y = f(x) \cos 2\pi x$.

Soit $y = f(x)$ une courbe (c),

soit $Y = f(x) \cos 2\pi x$ une courbe (C).

Pour toute valeur entière k de x, on a $y = Y$, mais

$$\frac{dY}{dx} = f'(x) \cos 2\pi x - 2\pi f(x) \sin 2\pi x,$$

en sorte que pour $x = k$, on a $\frac{dY}{dx} = f'(x)$.

Les deux courbes (c) et (C) ont donc des points communs pour toutes les valeurs entières de x, et en ces points des tangentes communes.

On peut encore observer que

pour $x = k + \frac{1}{2}$, $Y = -y$,

et que pour $x = k \pm \frac{1}{4}$, $Y = 0$.

Ces remarques permettront, dans un certain nombre de cas, de construire la courbe (C). On pourra les appliquer notamment en prenant

$$\begin{cases} y = \sqrt{2px}, & (c) \\ Y = \sqrt{2px} \cos 2\pi x. & (C) \end{cases}$$

(Communiqué par M. Laisant.)

Question XX. — « *Courbe analytique du visage de l'homme.* »

« Ligne singulière inventée par M. Hudde, par laquelle il tâche d'exprimer tous les linéaments du visage d'un homme connu, et de les définir par une équation algébrique. Une idée si extraordinaire a été communiquée à *M. Leibnitz* dans les *Actes de Leipsic, Ann. 1700,*

pag. 196 ; et il assure qu'il étoit en état de construire une pareille *Courbe.* Cette construction n'a cependant jamais paru. »

SAVERIEN, *Dictionnaire universel*, 1753 — t. I, p. 242.

QUESTIONS PROPOSÉES

Toutes les fois que cela sera possible, on s'efforcera d'obtenir au moins la forme générale de la courbe sans se servir des dérivées, soit en appliquant les procédés indiqués en mathématiques élémentaires, soit en remarquant que l'ordonnée de la courbe est la somme d'ordonnées de courbes faciles à construire, ou l'inverse de l'ordonnée d'une autre courbe. Dans certains cas, on construira facilement, et rapidement la courbe en cherchant seulement les points à l'infini et les points situés sur les axes de coordonnées : il sera loisible de vérifier ensuite les résultats obtenus, par une discussion régulière.

Construire les courbes représentées par les équations suivantes, qui sont toutes résolubles par rapport à une des variables. (Les axes sont supposés rectangulaires, sauf indication contraire.)

1. $y = x^2 - 7x + 6.$

2. $y = \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{(x-1)^2(x^2+1)^3}.$

3. $y = \dfrac{2x^2 - 8x + 9}{x^2 - 5x + 6}.$

4. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 3x + 4}.$

5. $y = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}.$

6. $y = (x+2)(x+3)(1-2x).$

7. $y = x^5 + 8x^4 + 11x^3 - 142x^2 + 32x + 224.$

(MONTUCLA.)

8. $y = \sqrt{\dfrac{x}{(x-4)^2}}.$

9. $y = \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{3x^2 - 5x + 4}.$

(On peut remarquer que l'équation s'écrit

$$y = 1 - \frac{3}{3x^2 - 5x + 4},$$

ce qui permet de construire la courbe au moyen de la parabole

$$y_1 = 3x^2 - 5x + 4.)$$

10. $y = \dfrac{(x-2)\sqrt{x-1}}{x^2+1}.$

11. $y = \sqrt{x + \sqrt{x^4+1}}.$

12. $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x + 1.$

13. $x^2y + aby - a^2x = 0.$

14. $y = \dfrac{x^2}{a} + \sqrt{ax}.$

(*Encyclopédie.*)

15. $y = \dfrac{x^2+1}{x^3(x^2+2)^2}.$

16. $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$

(Construire d'abord, au moyen des procédés de mathématiques élémentaires, la parabole $y_1 = x^2 - 3x + 2$.)

17. $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

Les ordonnées de cette courbe sont les inverses de celles de la parabole dont nous venons de parler.

18. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$.

Déduire la forme de cette courbe d'une des deux précédentes.

19. $y = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$.

20. $y = \frac{x^2}{\pm\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$.

21. $y = x \pm \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

22. $y = x^2 - 3x + 2 \pm \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

23. $y = \pm\sqrt{x^2 - 3x + 2} \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$.

24. $y = x^2 - 3x + 2 + \frac{1}{x}$.

25. $y = x^2 - 3x + 2 \pm \sqrt{1 - x^2}$.

26. $y = \sqrt{x \pm \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$.

27. $y = x \pm \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}}$.

28. $y = 2x + 1 \pm \frac{x - 1}{x^2 - 4}$.

29. $y = 2x - 1 \pm \sqrt{\frac{x - 1}{x^2 - 4}}$.

30. $y = x + 1 \pm \sqrt{\frac{x^4}{(x - 1)(x - 2)}}$.

31. $y = x^2 \pm 3(x - 1)\sqrt{x(x - 1)}$.

32. $y = \pm\sqrt{x} \pm \sqrt{x - 3}$.

33. $y = \pm\sqrt{\frac{x}{x - 1}} \pm \sqrt{\frac{x - 1}{x}}$.

34. $y = \frac{1}{4}x^2 \pm \sqrt{\frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 2}}$.

35. $y = \frac{1}{4}x^2 \pm \sqrt{\frac{x - 2}{(x - 1)(x - 3)}}$.

36. $y = x - 1 \pm \sqrt{\frac{(x - 2)^3}{x + 3}}$.

37. $$y = x \pm \sqrt{2 - 2x} \pm \sqrt{5 - x^2}.$$

38. $$y = \pm\sqrt{1 + x^2} \pm \sqrt{1 + \sqrt[4]{-9x} + \sqrt[3]{x\sqrt{8}}}.$$

39. $$y = \pm\frac{\sqrt{x^3 - 24x + 8}}{\sqrt{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}}.$$

40. $$y = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x - 3}.$$

41. $$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x + 3}.$$

42. $$y = \frac{x}{-1 \pm \sqrt{x^2 - 3x + 2}}.$$

43. $$y = x\sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt{x^2 + 2}.$$

44. $$y = \sqrt[5]{1 + x^3} + \sqrt{x^2 - 1}.$$

45. $$y = \sqrt[3]{\frac{2x^5 - 3x^2 + 4}{x^2 + 1}} + \sqrt[5]{\frac{3x^6 + 4x^5 - 2}{3x - 5}}.$$

46. $$y = \pm\sqrt{x - 1 \pm \sqrt{x^4 - 1}}.$$

47. $$y = \pm\sqrt{\frac{x \pm \sqrt{x}}{x - 2}}.$$

48. $$y = \pm\sqrt{x} \pm \sqrt{x^7 - 1}.$$

49 $$y = \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2}\right)^2 \pm \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x}\right)^2.$$

50. $$y = \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x.$$

51. $$y = \sqrt{x^2 + 1} \pm 3\sqrt[10]{x^3 + 1}.$$

52. $$y = \pm\sqrt{\frac{x^3 - 2x}{x + 1}} + \sqrt[3]{\frac{x^4 - 1}{x + 2}}.$$

53. $$x^3 - 3x^2y + x - y^2 = 0.$$

54. $$x^4 + x^2(y^2 - 6y) + y^2 = 0.$$

55. $$x^4 + x^2y^2 - 6x^2 + y^2 = 0.$$

56 $$y^2 = \frac{x(x - 2)^2(x - 4)^4}{(x - 1)^3(x - 3)^2}.$$

57. $$y^3 + x^3 - x^2 - y^2 = 0.$$

(L'équation deviendra résoluble si on fait tourner les axes de $\frac{\pi}{4}$.)

58 $$x^3y - 4x + 3y^2 = 0.$$

59. $$x^3y^2 - 2xy^2 + y^2 - x = 0.$$

60. $$(y - 2x - x^2)^2 = x^3.$$

61 $$y^2 = 1 - \sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x + 2}{x}}.$$

62 $$2x^4 - x^2y^2 + 2y^4 - x^3 - y^3 + x^2 + y^2 = 0.$$

(Faire tourner les axes de $\frac{\pi}{4}$.)

63. $$4x^2(y^2 - 1) = y^2(xy - 2).$$

(Vérifier la forme obtenue, en employant la méthode des régions.)

64. $$y^4 - 2y^2(x^2 - 1) + (x^2 - 1)(x^2 + 5) = 0,$$

65. $$x^5 - x^2y + y^2 = 0.$$

66 $$y^2 - 2xy - 3x^2 + x^4 - x^5 = 0.$$

67. $$x^3 + y^{13} - x^2 = 0.$$

68 $$3x^5y^2 - 2xy + 4 = 0.$$

69 $$x^4 + y^4 - x^2y - yx^2 = 0.$$

Trouver une droite parallèle à la deuxième bissectrice et tangente à la courbe. (Poser $x + y = \lambda$ et former l'équation aux xy des points de rencontre.)

70. $$y = \pm\sqrt{6x - x^2} \pm \sqrt{6x + x^2} \pm \sqrt{36 - x^2}.$$

(Euler.)

71. $$y^4 + x^4 - 9x^2 - 9y^2 + 1 = 0.$$

$\left(\text{Faire tourmer les axes de } \frac{\pi}{4}.\right)$

72. $$y = m + (x - a)^{\frac{2}{3}}.$$

73. $$y = \frac{1}{a + bx^n}.$$

74. $$y = \sqrt{\frac{x^n}{x - 1}}.$$

75. $$y = \sqrt{\frac{x^n}{x - 1}} + \frac{1}{x}.$$

76. $$y = \frac{1}{(x-1)^n} + \frac{1}{(x-2)^n} + \frac{1}{(x-3)^n}.$$

Dans les quatre exercices précédents, n est supposé entier et positif.

77. $$c^4x^2y^2 = a^6y^2 + b^6x^2.$$

(Examiner le cas où $c^2 = a^2 - b^2$. Chercher aussi le point le plus proche de l'origine en exprimant que le cercle $\rho^2 = x^2 + y^2$ est tangent à la courbe.)

78. $x^2y^2 - l^2(y^2 + x^2 - 2xy \cos\theta) = 0$, θ étant l'angle des axes.

(Changer de coordonnées et prendre comme nouveaux axes les bissectrices des angles formés par les anciens.)

79. $$x^2y^2 = a^2y^2 + b^2x^2.$$

(Courbe dite *Kreuzcurve*.)

80. $$y = e^{x^3+px+q}.$$

81. $$x^4 + y^4 - 1 - 2y^2 - 2x^2 - 2x^2y^2 = k.$$

82. $$y^4 + 8y^2(x - p)(x - 2p) - p(2x - p)^3 = 0.$$

83. $$x^2y + aby - ax = 0.$$

(*Anguinea* de Newton.)

84. $$x^4 = a^2y^2 + b^2x^2.$$

(Montucla.)

85. $$\frac{m^2}{n^2} = \frac{x^2y^2 + b^2y^2 + 2by^3 + y^4}{x^2y^2 + a^2b^2 + 2a^2by + a^2y^2}.$$

(Courbe trouvée par *Snellius*, en cherchant l'aspect que présente pour l'œil le fond d'un vase rempli d'eau. L'œil est placé à une distance $OF = b$ du niveau du liquide, dont l'épaisseur est $FD = a$. Le point F est l'origine des coordonnées, FD l'axe des y.)

86. $y^4 - x^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 = 0.$
(Courbe du *diable*.)

87. $x = y\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-y^2}}{\sqrt{y^2-b^2}}$, où $a > b$.
(Courbe de l'extrados d'une arche semi-circulaire.)

88. $(x^4 - 5x^2 + 4)y^2 - 4xy + x^2 = 0.$
(*Bourses de licence*, 1885.)

89. $y = \dfrac{2^x - 1}{2^x - 4}.$

90. $y = xe^{-\frac{1}{x^2}}.$

91 $y = x^2e^{-x}.$

92. $y = x^{\frac{1}{x-1}}.$

93. $y = 2^x - x.$

94. $y = \dfrac{1}{2}x^2 - (1+e)x + e\mathrm{L}x.$

95. $y = e^{x - \frac{1}{x}}.$

96. $y = e^{\frac{x+2}{x^2-16}}.$

97. $y = a^{\frac{x^2}{x^2-1}}.$

98. $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 3x + 2}.$

99. $y = 2^{\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}}.$

100. $y = \dfrac{x}{1+e^{-x}}.$

101. $y = \dfrac{x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$

102. $y = \dfrac{\sin 3x}{\sin x}.$

103. $y = \dfrac{\cos 3x}{\cos x}.$

104. $y = \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}.$

105. $y = \mathrm{L}(1+x^5)^3.$

106. $y = \dfrac{\mathrm{L}x}{1+x-\mathrm{L}x}.$

107. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}.$

108. $y = x + \dfrac{\sin x}{x^2}.$

109. $y = x + \dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{\cos x}{x^2}.$

110. $y = 2\sin^2 x - 4\sin x + 1.$

111. $y = \cos x + x\sin x.$

112. $y = \operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{x}{1+x}.$

113. $y = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}.$

114. $y = x + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{\sin x}{x+1}.$

115. $y = \mathrm{L}[(x-1)(6x^2-5x+4)].$

116. $y^2 - \sin x - 3x^2 + 4y + 5x + 1 = 0.$

117. $y^2 = mx - \operatorname{tg} x.$

118. $y = \dfrac{x - \mathrm{L}x}{1+x-\mathrm{L}x}.$

119 $y = 2x(1-e^{x^2}).$

120 $x = \mathrm{L}(\operatorname{arc}\cos y).$
(Euler, 1796. La courbe est asymptote à un segment de droite.)

121. $y = m\sin\dfrac{n}{x}.$

122. $\cos y = m - a\sin x.$

123. $y = m\operatorname{tg}\dfrac{x}{n}.$

124. $y = x + m\sin\dfrac{x}{n}.$

125. $y = a \text{ séc } \frac{x}{b}$.

126. $x^y = y^x$. (EULER.)

127. $y^2 = \mathrm{L}x$. (Courbe dite *parabole hélicoïde* ou *spirale parabolique*.)

128. $y = \frac{x + \cos x}{x + \sin x}$.

129. Asymptotes de la courbe

$$y^4 - x^4 - 3xy^2 - 2x = 0.$$

On trouve $y = \pm \left(x + \frac{3}{4}\right)$.

Les spiriques sont des courbes inventées par Perseus Citticus : ce sont les sections planes du solide engendré par la révolution d'un cercle autour d'une tangente, d'une corde ou d'une ligne extérieure de son plan.

130. Construire en particulier la spirique, section de la surface

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2\mathrm{R}^2(x^2 + y^2) = 0,$$

par le plan

$$x = \frac{\mathrm{R}}{2}.$$

Le tore représenté par la première équation est appelé par *de Roberval* « *annulus strictus* ». Le P. Prestet emploie dans un sens analogue l'expression d' « *annulus clausus* ». (1707.)

131. Construire la courbe obtenue en projetant une hélice cylindrique sur un plan passant par l'axe du cylindre. (*Quadratrice de Tschirnhausen.* — Equation: $y = a \sin \frac{\pi x}{2a}$).

132. Construire par points et étudier la courbe représentée par l'équation

$$y = x \operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2a}.$$

(*Quadratrice de Dinostrate.*)

Cette courbe admet-elle des asymptotes ? (ainsi que le montre le *P. Léotaud*, dans sa dispute en 1663 avec le *P. Grégoire de Saint-Vincent*).

133. Une parabole glisse le long de son axe : soit B un point de l'axe intérieur à la parabole et lié à la courbe, soit G un point quelconque extérieur ; GB coupe la parabole en deux points. Construire la courbe décrite par l'un d'eux. (*Parabole de Descartes.*)

134. Sur un conoïde parabolique on trace un canal spiral issu du sommet (*spirale de Pappus*) et faisant un angle constant avec chaque génératrice : construire la courbe, projection de cette spirale sur la base de la surface. Le *P. Sébastien* a démontré en 1699 qu'un corps pesant décrivant cette spirale met le même temps à franchir chaque spire.

135. Trouver l'équation de la projection stéréographique d'une loxodromie, le plan de projection étant l'équateur, et le point de vue le pôle opposé à celui vers lequel s'approche la loxodromie. *Halley* dit que c'est une *logarithmique spirale*.

136. Construire la courbe, projection sur le plan des xy de l'intersection de la surface hélicoïde

$$z = \frac{h}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

avec le plan

$$z = x \operatorname{tg} \alpha + b.$$

(Construction des *ponts biais.*)

137. Construire la courbe

$$y = \log \frac{R - \sqrt{R^2 - x^2}}{y} + \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R}.$$

(Construction des *ponts biais.*)

138. Construire la courbe représentée par l'équation

$$y = \pm\sqrt{2ax} \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

(Exercice proposé aux examens oraux de l'*Ecole Polytechnique* vers 1838.) On lui appliquera les remarques indiquées ch. VII, question XVIII, et on construira en particulier les tangentes au point double.

139. Construire les courbes

$$Lx Ly = k,$$
$$Lx Ly = -k.$$

Expliquer les résultats obtenus en se rappelant que la fonction y^{Lx} est symétrique en x et y, autrement dit que $y^{Lx} = x^{Ly}$.

140. Construire la courbe

$$y = \cos\sqrt{x}.$$

Se rappeler que $\cos a$ est une fonction paire de a.

141. Construire la surface représentée par l'équation

$$[ax^2 - z(x^2 + y^2)]^2 = x^4(x^2 + y^2).$$

Couper par des plans parallèles à yox. Les axes sont supposés rectangulaires.

142. Construire la courbe

$$y = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}.$$

Application à $$y = e^{\frac{2x-1}{x^2-x}}.$$

143. Construire la courbe d'Agnesi

$$y = a\sqrt{\frac{x}{2a - x}}.$$

(Maria Gaëtana Agnesi, Milan, 1748.)

144. Construire la courbe

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x + \frac{1}{x}}.$$

CHAPITRE VIII

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — *Décomposer en fractions simples l'expression* $\dfrac{x}{x^4+1}$.

Nous avons

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1).$$

Par suite

$$\frac{x}{x^4+1}=\frac{\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}-\dfrac{x^2-x\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}{(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)}=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

La méthode des coefficients indéterminés conduit rapidement au même résultat, en observant que le développement cherché étant

$$\frac{Ax+B}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x\sqrt{2}+1},$$

il est forcé que $A=C$ et $B=-D$. Il faut en effet qu'en changeant x en $-x$ le développement change de signe, et on sait d'autre part que ce développement n'est possible que d'une manière (voyez question IV).

Question II. — *Décomposer en fractions simples l'expression*

$$\frac{5+6x-2x^2}{(3+2x)^3}.$$

La fraction s'écrit

$$\frac{5+6x-2x^2}{8\left(\frac{3}{2}+x\right)^3}.$$

Développons le numérateur par rapport aux puissances de $\left(\frac{3}{2}+x\right)$, au moyen de la formule de Taylor :

$$5+6x-2x^2=-\frac{17}{2}+12\left(\frac{3}{2}+x\right)-2\left(\frac{3}{2}+x\right)^2,$$

d'où nous déduisons comme résultat

$$-\frac{17}{2(3+2x)^3}+\frac{6}{(3+2x)^2}-\frac{1}{2(3+2x)}.$$

Question III. — *Décomposer en fractions simples l'expression*

$$\frac{8x^5+46x^4+107x^3+143x^2+114x+70}{(7+x)(1+x)^5}.$$

Le développement sera de la forme

$$\frac{f(x)}{(7+x)(1+x)^5}=\frac{A_0}{(1+x)^5}+\frac{A_1}{(1+x)^4}+\frac{A_2}{(1+x)^3}+\frac{A_3}{(1+x)^2}+\frac{A_4}{1+x}+\frac{B}{7+x}.$$

Or on a

$$\begin{aligned}f(x)&=f[-1+\overline{1+x}]\\&=f(-1)+\frac{f'(-1)}{1}(1+x)+\frac{f''(-1)}{1.2}(1+x)^2+\frac{f'''(-1)}{1.2.3}(1+x)^3\\&\qquad+\frac{f^{\text{IV}}(-1)}{4!}(1+x)^4+\cdots\\&=30+5(1+x)+18(1+x)^2+3(1+x)^3+6(1+x)^4+\cdots\end{aligned}$$

Si on divise $f(x)$ par $7+x$ ou par $6+(1+x)$, on trouve au quotient

$$5+3(1+x)^2+(1+x)^4.$$

Ainsi $\quad A_0=5,\quad A_1=0,\quad A_2=3,\quad A_3=0,\quad A_4=1.$

Pour obtenir B, afin d'éviter le calcul pénible de $f(-7)$ on pourra [1] faire dans les deux membres $x=0$, ce qui donnera

---

(1) Soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ une fraction où f est de degré plus petit que F. Rappelons que l'on sait obtenir le coefficient du développement qui correspond à un facteur binome simple de F,

$B = 7$. Le résultat est donc

$$\frac{5}{(1+x)^5} + \frac{3}{(1+x)^3} + \frac{1}{1+x} + \frac{7}{7+x}.$$

Question IV. — *Décomposer en fractions simples l'expression*

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^3}.$$

On a

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^3} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^3} = \frac{1}{x^2(1+x^2)^2} - \frac{1}{(1+x^2)^3}.$$

Le même artifice permet d'achever le calcul, et le résultat est finalement

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{(1+x^2)^3}.$$

Si on veut appliquer la méthode des coefficients indéterminés, on remarque que le développement est de la forme

$$\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{1+x^2} + \frac{Ex+F}{(1+x^2)^2} + \frac{Gx+H}{(1+x^2)^3},$$

---

ou celui des coefficients qui correspond à la plus haute puissance d'un facteur binome multiple de F.

Posons $$F(x) = (x-a)^p \varphi(x),$$

où φ ne renferme plus le facteur $x - a$. Nous avons pour coefficient de $\frac{1}{(x-a)^p}$ la valeur

$$A = \frac{f(a)}{\varphi(a)}, \qquad (1)$$

susceptible d'une autre forme, car de

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{(x-a)^p},$$

nous déduisons, en appliquant p fois la règle de l'Hôpital,

$$\varphi(a) = \frac{F^{(p)}(a)}{p!},$$

d'où $$A = \frac{p!\, f(a)}{F^{(p)}(a)}, \qquad (2)$$

formule particulièrement commode pour $p = 1$, auquel cas elle devient $A = \frac{f(a)}{F'(a)}$.

Ainsi, ces formules permettront dans l'exercice II de calculer le coefficient de $\frac{1}{\left(\frac{3}{2}+x\right)^2}$, dans l'exercice IV de calculer A, enfin dans l'exercice III elles donneront immédiatement A_0 et B.

Il ne s'agit bien entendu que de fractions de première espèce.

qui ne doit pas changer quand on remplace x par $-x$. Le développement étant possible d'une seule manière, il faut alors que

$$B = C = E = G = 0.$$

Il est facile d'achever.

Question V. — *Étant donnée l'expression*

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\frac{A_1}{(x-a)^2}+\frac{B_1}{(x-b)^2}+\frac{C_1}{(x-c)^2},$$

on propose (A, B, C, a, b, c *étant des constantes données et* $a > b > c$) *de déterminer* A_1 B_1 C_1 *de telle sorte que cette expression soit le carré d'une fonction rationnelle de* x. *Condition de possibilité.*

(*Bourses de licence*, 1887.)

Soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ la fraction rationnelle cherchée ; on aura

$$F(x) = (x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2.$$

Ensuite f sera de degré inférieur à F ; comme d'ailleurs ce polynome est carré parfait, il sera au plus du quatrième degré :

$$f(x) = (\lambda x^2 + \mu x + \nu)^2.$$

On aura donc identiquement

$$\frac{(\lambda x^2+\mu x+\nu)^2}{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2} = \frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c} + \frac{A_1}{(x-a)^2}+\frac{B_1}{(x-b)^2}+\frac{C_1}{(x-c)^2},$$

d'où

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}(\lambda x^2+\mu x+\nu)^2 = {} & A(x-a)(x-b)^2(x-c)^2 + A_1(x-b)^2(x-c)^2 \\ & + B(x-b)(x-c)^2(x-a)^2 + B_1(x-c)^2(x-a)^2 \\ & + C(x-c)(x-a)^2(x-b)^2 + C_1(x-a)^2(x-b)^2.\end{aligned}\right.$$

En faisant successivement $x = a$, $x = b$, $x = c$ dans cette relation (1) et dans celle qui s'en déduit en égalant les dérivées des deux membres, on obtient simplement les équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\sqrt{A_1B_1}}{a-b}+\frac{\sqrt{A_1C_1}}{a-c} &= A,\\ \frac{\sqrt{B_1C_1}}{b-c}+\frac{\sqrt{B_1A_1}}{b-a} &= B,\\ \frac{\sqrt{C_1A_1}}{c-a}+\frac{\sqrt{C_1B_1}}{c-b} &= C.\end{aligned}\right.$$

Si on additionne membre à membre ces équations, il vient

$$(3) \qquad 0 = A + B + C,$$

qui exprime la condition de possibilité du problème : cette condition pouvait d'ailleurs se déduire de (1), en égalant dans les deux membres les termes du cinquième degré.

Lorsque cette condition est remplie, les équations (2) se réduisent à deux et le problème est indéterminé. En posant d'ailleurs

$$\frac{\sqrt{A_1B_1}}{a-b} + \frac{\sqrt{B_1C_1}}{b-c} + \frac{\sqrt{C_1A_1}}{c-a} = \rho,$$

on conclut facilement

$$(4) \qquad \begin{cases} A_1 = \dfrac{(c-a)(a-b)}{b-c}\,\dfrac{(C-A+\rho)(A-B+\rho)}{B-C+\rho}, \\ B_1 = \dfrac{(a-b)(b-c)}{c-a}\,\dfrac{(A-B+\rho)(B-C+\rho)}{C-A+\rho}, \\ C_1 = \dfrac{(b-c)(c-a)}{a-b}\,\dfrac{(B-C+\rho)(C-A+\rho)}{A-B+\rho}. \end{cases}$$

Les relations (4) définissent A_1, B_1, C_1 en fonction d'un paramètre variable ρ. Il faudra cependant éviter de donner à ρ une des valeurs $C-B$, $A-C$, $B-A$: il est facile de voir que l'une de ces hypothèses entraînerait la nullité d'une des quantités A, B ou C.

QUESTIONS PROPOSÉES

Ces questions ont été à dessein écrites sans aucun ordre déterminé : les élèves doivent avant tout s'habituer à choisir rapidement, pour un exemple donné, la méthode ou les méthodes qui conviennent spécialement à ce cas particulier.

1. Décomposer en fractions simples l'expression

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)^4}.$$

On trouve

$$\frac{\frac{2}{625}}{x-2} - \frac{\frac{x-3}{5}}{(x^2+1)^4} - \frac{\frac{x+2}{25}}{(x^2+1)^3} - \frac{\frac{x+2}{125}}{(x^2+1)^2} - \frac{\frac{x+2}{625}}{x^2+1}.$$

2. Décomposer en fractions simples de seconde espèce l'expression

$$\frac{1}{1+x^4}.$$

On trouve

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}-x}{1-x\sqrt{2}+x^2}+\frac{\sqrt{2}+x}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right].$$

3. Décomposer en fractions simples l'expression

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}.$$

Décomposer en fractions simples de première ou de seconde espèce, suivant les cas, mais de manière à obtenir des coefficients réels, les fractions [1]

4. $$\frac{1-2x+3x^2-4x^3}{1+4x^4}=\frac{1}{4}\frac{2-5x}{1+2x+2x^2}+\frac{1}{4}\frac{2-3x}{1-2x+2x^2}.$$

5. $$\frac{1+x^2}{x-x^3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}.$$

6. $$\frac{1}{x^3(1-x)^2(1+x)}=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{1}{2(1-x)^2}+\frac{7}{4}\frac{1}{1-x}-\frac{1}{4}\frac{1}{1+x}.$$

7. $$\frac{1+x+x^2}{1+x^4}=\frac{-1}{1-x+x^2}+\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{1+x\sqrt{2}+x^2}+\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{1-x\sqrt{2}+x^2}.$$

8. $$\frac{1+2x+x^2}{\left(1-\frac{8}{5}x+x^2\right)(1+2x+3x^2)}=\frac{9}{178}\frac{17-5x}{1-\frac{8}{5}x+x^2}+\frac{5}{178}\frac{5+27x}{1+2x+3x^2}.$$

9. $$\frac{x-x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)}=\frac{x}{(1+x^2)^4}+\frac{x}{2(1+x^2)^3}-\frac{x}{4(1+x^2)}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{x+\sqrt{2}}{1+x\sqrt{2}+x^2}+\frac{1}{2}\frac{x-\sqrt{2}}{1-x\sqrt{2}+x^2}.$$

10. $$\frac{1}{x(x^2+1)^2}.$$

11. $$\frac{3x+1}{(x+1)(x-1)^3(x^2+1)^2}.$$

12. $$\frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)^2}.$$

13. $$\frac{3x^2-5x+1}{(x-1)^2(x^2+1)^3}.$$

14. $$\frac{x^3+x+1}{(x-1)^3(x^2+x+2)}.$$

15. $$\frac{x^5+3}{(x-1)^3(x^2-2x+2)^2}.$$

16. $$\frac{2x-1}{(3x+1)^2(x-1)^3(x^2+2)^2}.$$

17. $$\frac{4x^3-3(a+b+c+d)x^2+2x\Sigma ab-\Sigma abc}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}.$$

18. $$\frac{x^5}{(x+1)^2(x^2+x+1)}.$$

19. $$\frac{x}{(x+1)^2(x-1)}.$$

(1) Les résultats indiqués sont d'Euler (*Introductio in analysin infinitorum*).

20. $\dfrac{x1-{}^{2}}{x^2(1+x^2)}$.

21. $\dfrac{x^3}{(1-x)^2(1+x^4)}$.

22. $\dfrac{x^2}{(1-x)^3(1+x^2)}$.

23. $\dfrac{1+x^2}{x^5(1+x^3)}$.

24. $\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2(x-1)^2}$.

25. $\dfrac{x^2-1}{(x^2-3x+2)(x^2+1)^2}$.

26. $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x^4+x^3+x^2+x+1)}$.

27. $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2x^4}$.

28. $\dfrac{2x+1}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

29. $\dfrac{x^2+x+1}{x^3(x-2)^2}$.

30. $\dfrac{1}{(x^3-1)^2}$.

31. $\dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)^3}$.

32. $\dfrac{x+1}{(x^2+1)^2x^3}$.

33. $\dfrac{x}{x^4-2x^2+1}$.

34. $\dfrac{x}{(x+1)^2(x-1)^2}$.

35. $\dfrac{1}{x^2(x^2-1)}$.

36. $\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$.

37. $\dfrac{x}{(x^2+1)^2(x-1)}$.

38. $\dfrac{x}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

39. $\dfrac{x^8}{x^6-1}$.

40. $\dfrac{1}{x^8+1}$.

41. $\dfrac{x-1}{(x^2+1)^2(x+1)}$.

42. $\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$.

43. $\dfrac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$.

44. $\dfrac{x^2-x+1}{(x-3)^4(x^2+1)}$.

45. $\dfrac{3x^2+1}{x^3(x-1)}$.

46. $\dfrac{1+x^{10}}{x^2(x^2+1)^2}$.

47. $\dfrac{1}{(x^2-1)^4}$.

48. $\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$.

49. $\dfrac{x^5+1}{x^2(x^2+1)}$.

50. $\dfrac{x}{(x^2+1)^2(x-1)}$.

Décomposer en fractions simples de première espèce les fractions

51. $\dfrac{x^p+x^q-1}{(x-1)^3(x^2+1)}$ (p et q entiers et positifs).

52. $\dfrac{1}{x^4+1}$.

53. $\dfrac{x^m}{(x^2+1)^m}$ (m entier et positif).

54. $\dfrac{x^2}{(x^2+1)^3}$.

55. $\dfrac{x^2+1}{(x^2-x+1)^3}$.

56. $\dfrac{x^3+1}{(x^2-2x+2)^2}$.

57. $\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+1)^{10}}$.

58. $\dfrac{x^5+x^4}{(x^2+x+1)^3}$.

CHAPITRE IX

RECHERCHE DES FONCTIONS PRIMITIVES ET DES INTÉGRALES INDÉFINIES

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — *Calculer*

$$\int x(\text{arc tg } x)^2 dx = \text{A}.$$

On a
$$\text{A} = \frac{1}{2}\int (\text{arc tg } x)^2 d(x^2);$$
intégrant par parties :

$$\text{A} = \frac{1}{2}x^2(\text{arc tg } x)^2 - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,\text{arc tg } x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2(\text{arc tg } x)^2 + \int \frac{\text{arc tg } x}{1+x^2}\,dx - \int \text{arc tg } x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2(\text{arc tg } x)^2 + \frac{1}{2}(\text{arc tg } x)^2 - \int \text{arc tg } x\, dx;$$

mais

$$\int \text{arc tg } x\, dx = x\,\text{arc tg } x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\,\text{arc tg } x - \frac{1}{2}\text{L}(1+x^2).$$

Enfin

$$\text{A} = \frac{1}{2}(1+x^2)(\text{arc tg } x)^2 - x\,\text{arc tg } x + \text{L}\sqrt{1+x^2}.$$

Question II. — *Calculer*

$$\int x\sqrt{x^2+a^2}\,\log\frac{x^2-a^2}{b^2}\,dx = \text{A}.$$

On a

$$A = \frac{1}{3}\int \log\frac{x^2-a^2}{b^2}\, d(x^2+a^2)^{\frac{2}{3}},$$

et en intégrant par parties,

$$A = \frac{1}{3}(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\log\frac{x^2-a^2}{b^2} - \frac{2\log e}{3}\int\frac{x}{x^2-a^2}(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

On est ramené à calculer

$$B = \int\frac{x}{x^2-a^2}(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \int x(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\,dx + 2a^2\int x\,\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2-a^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}} + 2a^2C,$$

en posant $$C = \int\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{x^2-a^2}\,dx.$$

Pour avoir C, posons $x = a \operatorname{tg}\varphi$;

alors $$dC = \frac{a\sin\varphi\, d\varphi}{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\cos^2\varphi},$$

ce qui s'écrit

$$dC = -a\left(\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2}\cos\varphi - 1} + \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2}\cos\varphi + 1}\right),$$

d'où $$C = -a\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,L\,\frac{\sqrt{2}\cos\varphi - 1}{\sqrt{2}\cos\varphi + 1}\right);$$

mais de $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{a},$$

on tire $$\cos\varphi = \frac{a}{\pm\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Donc

$$C = \pm\sqrt{x^2+a^2} \mp \frac{a}{\sqrt{2}}\,L\,\frac{a\sqrt{2}+\sqrt{x^2+a^2}}{a\sqrt{2}-\sqrt{x^2+a^2}};$$

on voit, en faisant $x = a$ dans les deux membres, qu'il convient de prendre les signes supérieurs. Portant alors dans B cette valeur de C, puis dans A cette valeur de B,

$$A = \frac{1}{3}(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\log\frac{x^2-a^2}{b^2} - \frac{2\log e}{3}\left[\frac{1}{3}(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\right.$$

$$\left. + 2a^2\sqrt{x^2+a^2} - \frac{2a^3}{\sqrt{2}}\,L\,\frac{a\sqrt{2}+\sqrt{x^2+a^2}}{a\sqrt{2}-\sqrt{x^2+a^2}}\right].$$

Question III. — *Calculer* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{cotg}^3 x}{\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{cotg}^3 x}\,dx.$

On met facilement la quantité sous le signe $\int$ sous la forme

$$\frac{\operatorname{tg}^6 x + 1}{\operatorname{tg}^6 x - 1} = \frac{2}{3}\,\frac{\operatorname{tg}^4 x - 1}{\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + 1} + \frac{1}{3}\,\frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \frac{2}{3}\,\mathrm{A} + \frac{1}{3}\,\mathrm{B}.$$

Cherchons à calculer séparément $\int \mathrm{A}dx$ et $\int \mathrm{B}dx$. Exprimant ces quantités en fonction de $\cos 2x$, il vient

$$\mathrm{A} = -\frac{4\cos 2x}{3 + \cos^2 2x} = \frac{-\cos 2x}{2 - \sin 2x} - \frac{\cos 2x}{2 + \sin 2x},$$

d'où
$$\int \mathrm{A}dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{2 - \sin 2x}{2 + \sin 2x};$$

de même
$$\mathrm{B} = \frac{1}{\cos 2x},$$

d'où
$$\int \mathrm{B}dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

enfin

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{cotg}^3 x}{\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{cotg}^3 x}\,dx = \frac{1}{3}\,\mathrm{L}\left[\frac{2 - \sin 2x}{2 + \sin 2x}\sqrt{\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}\right].$$

QUESTIONS PROPOSÉES [1]

1. Trouver $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

Résultat : $-2\operatorname{cotg} 2x + c = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c.$

(*c* étant une constante).

2. Trouver $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$

Résultat : $\operatorname{arc\,tg} e^x + c.$

3. Trouver $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos 2x}.$

Résultat : $\displaystyle\mathrm{L}\sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}} + c.$

---

(1) Intégrer les fractions rationnelles données au chapitre précédent (après multiplication par dx).

4. Trouver $$\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2}.$$

Résultat : $$\frac{e^x}{1+x}+c.$$

5. Trouver $$\int \cos^2 x\,dx.$$

6. Calculer $$\int \cos^5 x\,dx.$$

Première méthode. — On emploiera l'intégration par parties, en remarquant que $\cos^5 x\,dx = \cos^4 x\,d\sin x$, et ainsi de suite.

Deuxième méthode. — On exprimera $\cos^5 x$ en fonction linéaire des cosinus des multiples de l'arc x :

$$(2\cos x)^5 = 2\cos 5x + 10\cos 3x + 20\cos x.$$

7. On a

$$2\int \frac{dz}{(1+z^2)^2} = c + \text{arc tg } z + \frac{z}{1+z^2}.$$

8. Fonction primitive de tg x. $(-l\cos x)$.

9. Fonction primitive de cotg x. $(l\sin x)$.

10. Fonctions primitives de $\sqrt{1-x^2}$, de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. Fonction primitive de $\dfrac{x}{(x-a)^2}$.

12. Trouver $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+x^4}$. Poser $x^2 = y$; on trouve $\frac{1}{2}$ arc tg x^2.

13. Trouver $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$. $(\text{arc sin } x - \sqrt{1-x^2})$.

14. Trouver $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Poser $x = \cos z$; on trouve $-\frac{1}{2}\text{arc cos } x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$.

15. Déduire de cette dernière intégrale $\int x \text{ arc sin } x\,dx$.
(Intégrer par parties.)

16. Trouver $$\int -2Ae^{-mx}\cos 2k\pi(\alpha - x)\,dx.$$

Résultat : $$\frac{Ae^{-mx}}{m^2+4k^2\pi^2}\left[2m\cos 2k\pi(\alpha-x) + 4k\pi\sin 2k\pi(\alpha - x)\right].$$

17. Trouver $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+lx}}{x}\,dx$. Poser $1+lx = z$; on trouve $\frac{2}{3}(1+lx)^{\frac{3}{2}}$.

18. Trouver $\int x^x(1 + lx)\, dx.$

19. Trouver le polynome ayant pour dérivée $(x^2 - 1)(x^2 + 2)$. Déterminer la constante de manière que le polynome égalé à zéro ait une racine double.

20. Trouver $\int \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)\sqrt{1 + x^4}} dx.$ Poser avec Euler $\frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} = p.$

21. Trouver $\int \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^4}} dx.$ Poser $\frac{x\sqrt{2}}{1 + x^2} = p.$

22. Trouver $\int x^3 \mathrm{L}x\, dx.$ $\left(\frac{x^4}{4}\mathrm{L}x - \frac{x^4}{16}\right.$: on intègre par parties.$\left.\right)$

23. Trouver $\int \frac{xe^x dx}{1 + x^2}.$ $\left(\frac{e^x}{1 + x}\right.$: par parties.$\left.\right)$

24. Trouver $\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 - 1}}$ et $\int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 1}}.$

On trouve $\sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$ et $-\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$: déduire ces résultats l'un de l'autre.

25. Trouver $\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{1 - x^2}}$ et $\int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{1 - x^2}}.$

On trouve $-\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$ et $-\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$: déduire ces résultats l'un de l'autre ; les comparer aux deux précédents.

26. Trouver $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}.$ On trouve,

si $\frac{p^2}{4} - q < 0,$ $\frac{1}{2\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}},$

si $\frac{p^2}{4} - q > 0,$ $\frac{1}{2\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \mathrm{L} \frac{x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}{x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$

27. Trouver $\int \frac{dx}{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}.$

28. Trouver $$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}.$$

Résultats
$$\begin{cases} \text{si } A>0, & \dfrac{1}{\sqrt{A}}\,\mathrm{L}\left[\dfrac{B}{2\sqrt{A}}+x\sqrt{A}+\sqrt{Ax^2+Bx+C}\right]; \\ \text{si } A<0, & \dfrac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\left[-\dfrac{2Ax+B}{\sqrt{B^2-4AC}}\right]. \end{cases}$$

29. Trouver $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x\cos\alpha+1}}.$$

30. Trouver $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, et $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.

En intégrant par parties, on trouve deux équations linéaires propres à déterminer ces deux intégrales.

31. Trouver $$\int \frac{dx}{x(ax+b)}. \qquad \left(\frac{1}{b}\,\mathrm{L}\,\frac{ax+b}{x}\right).$$

32. Indiquer comment on peut ramener l'intégrale $\int \frac{dx}{x^m(ax+b)}$ à l'intégrale $\int \frac{dx}{x^{m-1}(ax+b)}$, dans le cas de m entier et positif. On démontrera la formule

$$\int \frac{dx}{x^m(ax+b)} = -\frac{1}{(m-1)bx^{m-1}} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{x^{m-1}(ax+b)}.$$

33. Au moyen de la formule précédente, calculer explicitement $\int \frac{dx}{x^2(ax+b)}$, $\int \frac{dx}{x^3(ax+b)}$, $\int \frac{dx}{x^4(ax+b)}$, $\int \frac{dx}{x^5(ax+b)}$, ..., $\int \frac{dx}{x^p(ax+b)}$.

Résultats :

$$\frac{a}{b^2}\,\mathrm{L}\,\frac{ax+b}{x} - \frac{1}{bx},$$

$$-\frac{a^2}{b^3}\,\mathrm{L}\,\frac{ax+b}{x} + \frac{a}{b^2x} - \frac{1}{2bx^2},$$

$$\frac{a^3}{b^4}\,\mathrm{L}\,\frac{ax+b}{x} - \frac{a^2}{b^3x} + \frac{a}{2b^2x^2} - \frac{1}{3bx^3},$$

$$-\frac{a^4}{b^5}\,\mathrm{L}\,\frac{ax+b}{x} + \frac{a^3}{b^4x} - \frac{a^2}{2b^3x^2} + \frac{a}{3b^2x^3} - \frac{1}{4bx^4},$$

. . . . . .

. . . . . .

(p pair) : $$\frac{a^{p-1}}{b^p}\,\mathrm{L}\,\frac{ax+b}{x} - \frac{a^{p-2}}{b^{p-1}x} + \frac{a^{p-3}}{2b^{p-2}x^2} - \frac{a^{p-4}}{3b^{p-3}x^3} - \cdots + \frac{a}{(p-2)b^2x^{p-2}} - \frac{1}{(p-1)bx^{p-1}}.$$

(p impair) : $$-\frac{a^{p-1}}{b^p}\,\mathrm{L}\,\frac{ax+b}{x} + \frac{a^{p-2}}{b^{p-1}x} - \frac{a^{p-3}}{2b^{p-2}x^2} + \cdots + \frac{a}{(p-2)b^2x^{p-2}} - \frac{1}{(p-1)bx^{p-1}}.$$

34. Trouver $$\int \frac{dx}{(1+r^2x)^2\sqrt{1-x^2}}.$$

On pose $x^2 = y$ et on trouve $$\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{1+r^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

35. Trouver $\int \sin^n x\, dx.$

36. Trouver $\int \cos^n x\, dx.$

37. Trouver $\int \operatorname{tg}^n x\, dx.$

38 Trouver $\int \operatorname{cotg}^n x\, dx.$

39. Trouver $\int \operatorname{séc}^n x\, dx.$

40. Trouver $\int \operatorname{coséc}^n x\, dx.$

Dans les six exercices précédents, on suppose n entier et positif.

41. Trouver $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx$ et $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx,$ où m et n sont entiers et positifs.

42. Trouver $\int \frac{dx}{\sin^p x},$ en supposant p entier et positif.

43. Trouver $\int \frac{dx}{(1-x^2)^n},$ où n est entier et positif.

On pose $$x = \frac{1+z}{1-z},$$

d'où on a $$\frac{(-1)^n(1-z)^{2n-2}dz}{2^{2n-1}z^n},$$

et on achève en développant le numérateur.

44. Trouver $$\int \frac{dx}{x^2-3x+2}.$$

Employer la décomposition en fractions rationnelles, ou se reporter à un problème précédent.

45. Trouver $\int \frac{dx}{1-x^4}$ et $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}.$

On cherchera leur somme et leur différence.

46. Trouver $$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}} dx.$$

Cette intégrale se rencontre dans la théorie du pendule. On établira la relation

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{ax - x^2}} dx = -\frac{x^{m-1}\sqrt{ax - x^2}}{m} + \frac{m-1}{m} a \int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{ax - x^2}} dx.$$

47. Trouver $\int \frac{x^2 dx}{u^2}$, où $u = \cos x + x \sin x$.

On écrit l'intégrale ainsi :

$$\int \left[-d\left(\frac{1}{u}\right) \right] \frac{x^2 dx}{du},$$

et on intègre par parties.

CHAPITRE X

CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — *Trouver la limite de la somme*

$$\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}},$$

lorsque n augmente indéfiniment.

Posons $n=\frac{1}{dx}$: quand n augmentera indéfiniment, dx tendra vers 0. La somme devient alors

$$dx\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{1-dx^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(2dx)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1-[(n-1)dx]^2}}\right).$$

Considérons l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. En prenant comme limites 0 et 1, ou bien, ce qui revient au même, 0 et ndx, on a

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=dx\left(\frac{1}{\sqrt{1-0}}+\frac{1}{\sqrt{1-dx^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(2dx)^2}}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{1-[(n-1)dx]^2}}\right).$$

Ainsi l'intégrale définie $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, considérée comme limite de somme, donne justement le résultat cherché. D'ailleurs

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc sin }1-\text{arc sin }0=\frac{\pi}{2};$$

donc la somme proposée a pour limite $\frac{\pi}{2}$.

Question II. — *Calculer* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx.$

Cherchons d'abord l'intégrale indéfinie

$$\int \sin^m x\, dx = -\int \sin^{m-1} x\, d\cos x,$$

ou en intégrant par parties,

$$\int \sin^m x\, dx = -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1)\int \sin^{m-2} x \cos^2 x\, dx.$$

Mais

$$\int \sin^{m-2} x \cos^2 x\, dx = \int \sin^{m-2} x\, dx - \int \sin^m x\, dx.$$

De ces deux relations il résulte

$$m\int \sin^m x\, dx = -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1)\int \sin^{m-2} x\, dx.$$

d'où, en introduisant les limites,

$$m\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\, dx.$$

Il est facile d'achever, et en remarquant d'ailleurs que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1 x\, dx = 1,$$

et que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\, dx = \frac{\pi}{2},$$

nous trouvons

pour $m = 2k+1$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\, dx = \frac{2.4.6\ldots 2k}{1.3.5.7\ldots(2k+1)}$;

pour $m = 2k$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\, dx = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\,\frac{\pi}{2}.$

Question III. — *La série* $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ..., $\varphi(n)$, ..., *où* $\varphi(x)$ *est continuellement décroissante, est convergente ou divergente en même temps que* $\int_0^{\infty} \varphi(x)dx$ *est finie ou infinie.*

Cela résulte immédiatement de ce que l'intégrale

$$\int_0^n \varphi(x)dx$$

est comprise entre les deux sommes de rectangles représentées par

$$\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) \cdots + \varphi(n)$$

et par

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) \cdots + \varphi(n+1).$$

Si $\varphi(x)$ est infinie pour $x = 0$, le caractère de convergence s'appliquera encore, en substituant à l'intégrale précédente la suivante :

$$\int_k^\infty \varphi(x)dx,$$

où k est positif, quelconque d'ailleurs.

Appliquer à la série dont le terme de rang n est $\frac{1}{n^2}$.

QUESTIONS PROPOSÉES

Effectuer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \cos x dx.$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi}.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\varphi^3 \cos\varphi t \sin\varphi t dt.$

4. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2}.$

5. $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}.$

6. $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\varphi + x^2}.$

7. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\cos\varphi + x^2}.$

8. $\int_0^\pi \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x + \alpha^2}}$

9. Démontrer l'inégalité

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx,$$

où m est entier et positif.

10. Déduire de là la *formule de Wallis :*

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{(2.4.6.\ldots.2m)^2}{[1.3.5.\ldots(2m-1)]^2(2m+1)}.$$

11. Démontrer que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

12. En déduire la formule

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^{2n-1}} \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3.1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2} \frac{\pi}{2}.$$

13. Tirer de cette dernière égalité la valeur de l'intégrale de Laplace :

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Poser $x = \frac{z}{\sqrt{n}}$, et se reporter à la formule de Wallis.

14. Prouver que $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{m-1} dx = \int_0^1 \left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{m-1} dx.$

Cette intégrale, appelée *intégrale Eulérienne de seconde espèce*, a été représentée par Legendre par la notation $\Gamma(m)$.

15. Démontrer que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

16. Démontrer que si n est entier et positif, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.

17. En supposant p et q entiers, démontrer que

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

L'intégrale du premier membre est dite *intégrale Eulérienne de première espèce :* on la représente d'ordinaire par $\mathrm{B}(p, q)$.

18. Démontrer la formule

$$\frac{\theta}{2} = \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta \ldots$$

Partir du développement de $\frac{\sin\theta}{1+2x\cos\theta+x^2}$, dont le résultat est indiqué aux *Additions;* on suppose $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

19. Démontrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

20. Démontrer que $\int_0^1 x^n \mathrm{L}x\, dx = \frac{-1}{(n+1)^2}$.

21. Démontrer que $\int_0^1 x^n (\mathrm{L}x)^m = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}$.

Dans ces deux formules, m et n sont entiers et positifs.

22. Démontrer que $\int_0^1 \frac{\mathrm{L}x\, dx}{1-x} = -\frac{\pi^2}{6}$.

Développer en série l'expression $\frac{\mathrm{L}x}{1-x}$ et intégrer

23. Démontrer que $\int_0^1 \frac{Lx\,dx}{1+x} = -\frac{\pi^2}{12}$.

24. Ayant développé en série ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x la fraction $\frac{\sin\theta}{1+2x\cos\theta+x^2}$, tirer de là une nouvelle formule en multipliant les deux membres par dx et intégrant.

25. Différentier les deux membres de la formule 18 et obtenir ainsi une nouvelle série.

26. Démontrer que l'on a

$$\int_0^1 x^{m+\alpha-1}dx = \frac{1}{m} - \frac{\alpha}{m^2} + \frac{\alpha^2}{m^3} - \frac{\alpha^3}{m^4} + \cdots$$

27. Démontrer que l'on a

$$\int_0^1 x^{m+\alpha-1}dx = \int_0^1 x^{m-1}dx + \alpha\int_0^1 x^{m-1}Lx\,dx + \frac{\alpha^2}{1.2}\int x^{m-2}(Lx)^2dx + \cdots$$

28. Déduire de ces deux formules que

$$\int_0^1 x^{m-1}\left(L\frac{1}{x}\right)^n = \frac{n!}{m^{n+1}}.$$

Dans ces trois exercices, m, n et α sont des nombres entiers et positifs.

29. Effectuer l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-2r\lambda x+r^2\lambda^2}\sqrt{1-\frac{2\lambda x}{r}+\frac{\lambda^2}{r^2}}}.$$

Pour obtenir l'intégrale indéfinie, poser $1 - r^2\lambda^2 - 2r\lambda x = y^2$.

30. La *fonction* X_n *de Legendre* étant définie par la relation

$$X_n = A\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

prouver que

$$\int_{-1}^{+1} X_n f(x)dx = 0,$$

f étant un polynome entier de degré $\leqslant n-1$.

31. Réciproquement, cette propriété suffit à caractériser la fonction X_n.

32. Démontrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{(a^2-1)dx}{a^2-2a\cos x+1} = \pm\pi,$$

suivant que a est >1 ou <1.

33. Démontrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(1 - 2a\cos x - a^2)(1 - 2b\cos x - b^2)} = \frac{\pi}{1 - ab}$$

34. La *fonction de Gauss*, appelée $\varpi(x)$, étant définie par la relation

$$\varpi(x) = \frac{(m-1)!\, m^x}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)},$$

où x est entier, démontrer que

$$\lim_{m=\infty} \varpi(x) = x!$$

35. Au moyen de la formule de Wallis, démontrer que

$$\frac{\Gamma^2(m)}{\Gamma(2m)} = \sqrt{\frac{2m+1}{2}}\,\pi\,\frac{m^{-\frac{1}{2}}\, 2^{m-2}(2m-1)}{2^{m-1}.m}.$$

36. Déduire de là que $\varpi\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

37. De la formule $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\, x$, déduire que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

38. De la formule $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin x$, déduire les suivantes :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3.3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{2^5.5} + \cdots$$

Pour ces deux questions, on commencera par développer en séries les expressions

$$\frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

39. Démontrer que pour n et s entiers et positifs, on a

$$\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)^s dx = \frac{n!}{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}.$$

40. Démontrer que la série

$$\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)} + \frac{1}{(p+m)(p+m+1)\ldots(p+m+n)} + \cdots$$

a pour somme l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^n x^{p-1}}{(1-x^m)\, n!}\, dx.$$

41 Démontrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{L} \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2}\mathrm{L}2.$

Comparer cette intégrale aux deux suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{L} \cos x \, dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{L} \sin 2x \, dx.$$

42. Démontrer que

$$\int_0^{\infty} x^{2r} dx = \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots 1}{2^r} \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

43. Trouver la somme de la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

On remarque que c'est $-\int_0^1 \frac{\mathrm{L}x}{1-x} dx = \frac{\pi^2}{6}.$

44. Trouver la somme de la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}\frac{1}{2} + \frac{1.2}{1.2.3}\frac{1}{3} + \cdots$$

C'est évidemment la même que la précédente. On peut la trouver directement.

45. Trouver la somme de la série

$$\frac{1}{1.2^2} + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{3.4^2} + \cdots$$

46. Si n est un nombre entier, on a

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1.3.5\ldots(2m+1)}{2.4.6\ldots(2m+2)} = \frac{1}{2} - \frac{m}{1}\frac{1}{2.4} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1.3}{2.4.6} - \cdots \\ &\frac{2.4.6\ldots(2m)}{3.5.7\ldots(2m+1)} = 1 - \frac{m}{1}\frac{1}{3} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{5} - \cdots \end{aligned}\right.$$

(Cl. Servais.)

47. « Soit $F(x)$ une fonction de x qui donne une intégrale finie et déterminée lorsqu'on l'intègre entre les limites μ_1 et μ de la variable. La valeur de l'intégrale ne change pas si, conservant les mêmes limites, on substitue à la variable l'expression linéaire $\mu_1 + \mu - x$. » (Marchand.)

Autrement dit, on a

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(x)dx = \int_{\mu_1}^{\mu} F(\mu_1 + \mu - x)dx.$$

48. Comme application, on a

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^1 (1-x)^{p-1}x^{q-1}dx.$$

33. Démontrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(1 - 2a\cos x - a^2)(1 - 2b\cos x - b^2)} = \frac{\pi}{1 - ab}.$$

34. La *fonction de Gauss*, appelée $\varpi(x)$, étant définie par la relation

$$\varpi(x) = \frac{(m-1)!\, m^x}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)},$$

où x est entier, démontrer que

$$\lim_{m=\infty} \varpi(x) = x!$$

35. Au moyen de la formule de Wallis, démontrer que

$$\frac{\Gamma^2(m)}{\Gamma(2m)} = \sqrt{\frac{2m+1}{2}}\,\pi\,\frac{m^{-\frac{1}{2}}\, 2^{m-2}(2m-1)}{2^{m-1}.m}.$$

36. Déduire de là que $\varpi\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

37. De la formule $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\, x$, déduire que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

38. De la formule $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin x$, déduire les suivantes :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3.3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{2^5.5} + \cdots$$

Pour ces deux questions, on commencera par développer en séries les expressions

$$\frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

39. Démontrer que pour n et s entiers et positifs, on a

$$\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)^s dx = \frac{n!}{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}.$$

40. Démontrer que la série

$$\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)} + \frac{1}{(p+m)(p+m+1)\ldots(p+m+n)} + \cdots$$

a pour somme l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^n x^{p-1}}{(1-x^m)\, n!}\, dx.$$

41 Démontrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{L} \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2}\mathrm{L}2.$

Comparer cette intégrale aux deux suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{L} \cos x \, dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{L} \sin 2x \, dx.$$

42. Démontrer que

$$\int_0^{\infty} x^{2r} e^{-x^2} dx = \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots 1}{2^r} \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

43. Trouver la somme de la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

On remarque que c'est $-\int_0^1 \frac{\mathrm{L}x}{1-x} dx = \frac{\pi^2}{6}.$

44. Trouver la somme de la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}\frac{1}{2} + \frac{1.2}{1.2.3}\frac{1}{3} + \cdots$$

C'est évidemment la même que la précédente. On peut la trouver directement.

45. Trouver la somme de la série

$$\frac{1}{1.2^2} + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{3.4^2} + \cdots$$

46. Si n est un nombre entier, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1.3.5\ldots(2m+1)}{2.4.6\ldots(2m+2)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{m}{1}\dfrac{1}{2.4} + \dfrac{m(m-1)}{1.2}\dfrac{1.3}{2.4.6} - \cdots \\ \dfrac{2.4.6\ldots(2m)}{3.5.7\ldots(2m+1)} = 1 - \dfrac{m}{1}\dfrac{1}{3} + \dfrac{m(m-1)}{1.2}\dfrac{1}{5} - \cdots \end{array}\right.$$

(Cl. Servais.)

47. « Soit $F(x)$ une fonction de x qui donne une intégrale finie et déterminée lorsqu'on l'intègre entre les limites μ_1 et μ de la variable. La valeur de l'intégrale ne change pas si, conservant les mêmes limites, on substitue à la variable l'expression linéaire $\mu_1 + \mu - x$. » (Marchand.)

Autrement dit, on a

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(x)dx = \int_{\mu_1}^{\mu} F(\mu_1 + \mu - x)dx.$$

48. Comme application, on a

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^1 (1-x)^{p-1}x^{q-1}dx.$$

En déduire que

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \pi.$$

49. Plus généralement, on a

$$\int_{\mu 1}^{\mu} F(x)dx = \int_{\alpha-\mu}^{\alpha-\mu_1} F(\alpha - x)dx,$$

α étant une constante. (LAISANT.)

(Voyez, pour ces trois questions, *Nouvelles Annales*, octobre 1882; *Ass. fr.*, *Congrès de Rouen*, 1883.)

50. D'après M. Moreau, $S_2(n)$ et $S_3(n)$ étant les sommes des carrés et des cubes des coefficients de $(x+1)^n$, on a

$$\begin{cases} S_2(n) = \dfrac{2^{2n}}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{2n}\alpha\, d\alpha, \\ S_3(n) = \dfrac{2^{2n}}{\pi^2}\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \cos^n\alpha\,(\cos\alpha + \cos\beta)^n\, d\alpha\, d\beta. \end{cases}$$

D'où, pour n entier positif,

$$S_2(n) = C_{2n,n}.$$

(*Int. des math.*, question 42, p. 17 et 47.)

51.[1] Lorsque l'on sait trouver l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\varpi^2)d\varpi = 2A,$$

on peut en déduire d'autres comme il suit.

1° En changeant ϖ en $\varpi \pm m$, on obtient

$$2A = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varpi^2 \pm 2m\varpi + m^2)d\varpi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left[f(\varpi^2 + 2m\varpi + m^2) + f(\varpi^2 - 2m\varpi + m)^2\right]d\varpi.$$

2° Par la transformation $\varpi = \theta - \dfrac{m}{2\theta}$, on obtient

$$2A = \int_0^{\infty} f\left(\theta^2 - m + \frac{m^2}{4\theta^2}\right)\left(1 + \frac{m}{2\theta^2}\right)d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\varpi^2 - m + \frac{m^2}{4\varpi^2}\right)d\varpi.$$

52. *1ère application.* — Soit $f(\varpi^2) = e^{-\varpi^2}$, on trouve

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} e^{-\varpi^2 - m^2}\left(\frac{e^{2m\varpi} + e^{-2m\varpi}}{2}\right)d\varpi$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\varpi^2 + m - \frac{m^2}{4\varpi^2}}\, d\varpi.$$

(1) Les exercices 51 à 54 proviennent des *Œuvres complètes* d'Augustin CAUCHY, 1re série, tome I, p. 115, note II.

53. Les formules du n° 52 donnent en changeant m en mi :

$$e^{-m^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\varpi^2} \cos 2m\varpi \, d\varpi,$$

$$e^{-m} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\varpi^2 - \frac{m^2}{4\varpi^2}} d\varpi.$$

54. 2*ème application.* — Soit $f(\varpi^2) = \cos \varpi^2$ ou $\sin \varpi^2$, on trouve

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\infty \cos(m^2 + \varpi^2) \cos 2m\varpi \, d\varpi$$

$$= \int_0^\infty \sin(m^2 + \varpi^2) \cos 2m\varpi \, d\varpi$$

$$= \int_0^\infty \cos\left(\varpi^2 - m + \frac{m^2}{4\varpi^2}\right) d\varpi$$

$$= \int_0^\infty \sin\left(\varpi^2 - m + \frac{m^2}{4\varpi^2}\right) d\varpi.$$

CHAPITRE XI

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES ET EN PRODUITS INFINIS

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — *Démontrer la formule*

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1}) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ *étant des nombres qui annulent* $f(x)$; ξ *étant compris entre le plus petit et le plus grand des nombres* $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, *et* $f(x)$ *étant continue ainsi que ses* $(n+1)$ *premières dérivées, dans l'intervalle qui sépare le plus petit des nombres* $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ *du plus grand.*

x ayant une valeur déterminée, $f(x)$ est un nombre également déterminé que je puis représenter par

$$(1) \qquad f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1})A,$$

A étant une constante.

Je remplace ensuite dans (1), x par la variable X, A restant constant, et je pose

$$(2) \qquad \varphi(X) = f(X) - (X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_{n+1})A.$$

$\varphi(X)$ s'annule pour $X = x$, d'après (1), et ensuite pour $x = x_1$, $x = x_2, \ldots, x = x_{n+1}$, c'est-à-dire en tout pour $(n+2)$ valeurs de X. Il en résulte que $\varphi^{(n+1)}(X)$ s'annule pour une valeur ξ comprise entre les deux nombres extrêmes de la suite $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Calculons donc $\varphi^{(n+1)}(X)$, et exprimons que le résultat est nul pour $X = \xi$. En remarquant que le seul terme du produit

$$(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_{n+1})A$$

qui donne lieu à une dérivée d'ordre $(n+1)$ est celui de degré le plus élevé AX^{n+1}, on a

$$\varphi^{(n+1)}(X) = f^{(n+1)}(X) - (n+1)!\,A$$

et
$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\,A = 0,$$

d'où
$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

et en portant cette valeur de A dans (1) on obtient la formule cherchée.

Si en particulier $(n+1) = 1$,

$$f(x) = (x - x_1)f'(\xi),$$

ξ étant compris entre x et x_1.

Question II. — *La fonction* $f(x+h)$ *ayant été développée par la formule de Taylor*

$$(1)\quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),$$

trouver la limite de θ *quand* h *tend vers* 0.

Développons une seconde fois $f(x+h)$ par cette formule, mais en prenant un terme de plus :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) \\ + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta_1 h). \end{aligned}\right.$$

On a en comparant (1) et (2)

$$(3)\quad f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x) = \frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(x+\theta_1 h);$$

mais d'autre part on peut écrire

$$(4)\quad f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x) = \theta h[f^{(n+1)}(x) + \varepsilon],$$

où ε tend vers 0, et si on compare (3) et (4), il vient

$$(5)\quad \frac{\theta}{n+1} = \frac{f^{(n+1)}x + \varepsilon}{f^{(n+1)}(x+\theta_1 h)}.$$

Si maintenant h tend vers 0, la formule (5) est constamment vérifiée, et comme la limite du deuxième membre est 1, on a

$$\lim \theta = \frac{1}{n+1}.$$

En particulier, dans la formule de l'accroissement fini

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h),$$

on a
$$\lim \theta = \frac{1}{2}.$$

Question III. — FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS.

Soit le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(a+h) & \varphi(a+h) & \psi(a+h) \\ f(a+\theta h) & \varphi(a+\theta h) & \psi(a+\theta h) \end{vmatrix},$$

où f, φ et ψ sont des fonctions continues dans l'intervalle de 0 à 1. Il s'annule pour $\theta = 0$ et $\theta = 1$, donc sa dérivée par rapport à θ s'annule pour une valeur θ_1 comprise entre 0 et 1. On a donc, en remarquant que θ n'entre que dans les éléments de la troisième ligne du déterminant,

$$\Delta'_\theta = \begin{vmatrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(a+h) & \varphi(a+h) & \psi(a+h) \\ hf'(a+\theta h) & h\varphi'(a+\theta h) & h\psi'(a+\theta h) \end{vmatrix},$$

et
$$\begin{vmatrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(a+h) & \varphi(a+h) & \psi(a+h) \\ f'(a+\theta_1 h) & \varphi'(a+\theta_1 h) & \psi'(a+\theta_1 h) \end{vmatrix} = 0.$$

1° Supposons que $\psi(a) = 1$; cette formule devient, après réduction,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{\varphi(a+h) - \varphi(a)} = \frac{f(a+\theta_1 h)}{\varphi'(a+\theta_1 h)}.$$

2° Supposons en outre $\varphi(a) = a$ et prenons la dérivée de Δ par rapport à $a + \theta h$.

$$\Delta'_{a+\theta h} = h \begin{vmatrix} f(a) & a & 1 \\ f(a+h) & a+h & 1 \\ f'(a+\theta h) & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

d'où, en écrivant que cette dérivée s'annule pour $\theta = \theta_1$:

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta_1 h).$$

(JORDAN.)

Question IV. — Conditions de convergence d'un produit infini.

Pour qu'un produit composé d'un nombre infini de facteurs soit convergent, il faut d'abord que les facteurs tendent vers un quand leur rang augmente indéfiniment.

Considérons un produit,

$$P = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\ldots(1 + \alpha_n)\ \ldots,$$

où α_1, α_2, ... sont réels et positifs et où α_n tend vers zéro. Posons

$$P_n = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\ldots(1 + \alpha_n).$$

Il faut et il suffit que pour n très grand, P diffère fort peu de P_n, ou que

$$(1 + \alpha_n)(1 + \alpha_{n+1})\ \ldots(1 + \alpha_{n+p})$$

diffère très peu de l'unité, ou que

$$H = L(1 + \alpha_n) + L(1 + \alpha_{n+1}) + \cdots + L(1 + \alpha_{n+p})$$

soit une quantité infiniment petite quelque grand que soit p.

Cette quantité s'écrit, en développant chacune des expressions qui la composent par la formule de Mac-Laurin arrêtée au second terme :

$$H = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p} - \frac{1}{2}(\theta_1\alpha_{n+1}^2 + \theta_2\alpha_{n+2}^2 + \cdots + \theta_p\alpha_{n+p}^2),$$

où les quantités θ sont comprises entre zéro et un.

H se présente ainsi sous la forme d'une différence de deux parties, dont la seconde est infiniment petite par rapport à la première. Il est clair que cette quantité H sera infiniment petite, ou bien augmentera indéfiniment (lorsque p augmentera indéfiniment), suivant que la série

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

sera convergente ou divergente.

Si les quantités α_1, α_2, ... sont toutes négatives, H sera infiniment petite, ou aura pour limite zéro, suivant que la série que nous venons de considérer sera convergente ou divergente.

La condition de convergence est dans les deux cas que cette série soit convergente. Nous ne considérons pas le produit P comme convergent quand il a pour limite zéro.

Plus généralement, quels que soient les nombres réels α_1, α_2, ..., le produit

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\ldots(1 + \alpha_n)\ldots$$

est convergent lorsque les deux séries

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots,$$
$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 + \ldots$$

sont convergentes.

Il tend vers zéro lorsque la première série est convergente et la seconde divergente.

(BERTRAND, *Calcul intégral*, p. 409.)

Question V. — *Lorsque les termes d'une série convergente sont des fonctions continues de x, il n'est pas forcé que la série soit une fonction continue de x.*

Exemple : la série

$$x(1-x)+x^2(1-x^2)+\cdots+x^n(1-x^n)+\cdots$$

est convergente pour $x<1$ et a pour somme $\dfrac{x}{1-x^2}$.

Si donc x s'approche de 1, la série acquiert des valeurs de plus en plus grandes. Or, pour $x=1$, elle a pour somme zéro, tous ses termes étant nuls.

(BERTRAND, *Calcul intégral*, p. 270).

Question VI. — NOTE SUR LA FORMULE DE MAC-LAURIN.

La formule dite « de Mac-Laurin » paraît devoir être attribuée à Stirling (*Lineæ tertii ordinis Newtonianæ*, 1717).

Le principe de la méthode employée par Stirling consiste à considérer une fonction développée en série convergente par rapport aux puissances croissantes de x : les coefficients des différentes puissances de x s'obtiennent en égalant les dérivées successives de la fonction et de la série, et faisant ensuite dans ces relations $x=0$.

QUESTIONS PROPOSÉES

Ut non finitam Seriem finita coërcet,
Summula, et in nullo limite limes adest :
Sic modico immensi vestigia Numinis hœrent
Corpore, et angusto limite limes abest.
Cernere in immenso parvum, dic, quanta voluptas !
In parvo immensum cernere, quanta, Deum !

Jacques BERNOULLI.

1. Si m est pair, on a

$$\cos x=\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right),$$

$$\sin x = m \sin\frac{x}{m}\cos\frac{x}{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right).$$

2. Si m est impair, on a

$$\cos x = \cos\frac{x}{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right),$$

$$\sin x = m \sin\frac{x}{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{4\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right).$$

3. Déduire de là les formules

$$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots,$$

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

4. De ces formules, tirer les suivantes :

$$\operatorname{tg} x = \frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-x^2}+\frac{2x}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2-x^2}+\frac{2x}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2-x^2}+\cdots,$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x}-\frac{2x}{\pi^2-x^2}-\frac{2x}{(2\pi)^2-x^2}-\frac{2x}{(3\pi)^2-x^2}-\cdots$$

5. On a

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

(Formule donnée par Wallis, dans son *Arithmetica infinitorum*, 1657.)

6. Démontrer que l'on a

$$\log\cos\frac{m\pi}{2n} = \log\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)+\log\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)+\log\left(1-\frac{m^2}{25n^2}\right)+\cdots$$

$$\log\sin\frac{m\pi}{2n} = \log\frac{m\pi}{2n}+\log\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)+\log\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)+\cdots$$

7. Démontrer que l'on a

$$\mathrm{L}\cos\frac{m\pi}{2n} = -\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right)$$
$$-\frac{m^4}{n^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots\right)$$

$$-\frac{m^6}{n^6}\left(\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\cdots\right)$$
$$-\frac{m^8}{n^8}\left(\frac{1}{1^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\cdots\right)$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{L}\sin\frac{m\pi}{2n}=\mathrm{L}\,\frac{\pi}{2}+\mathrm{L}m-\mathrm{L}n$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots\right)$$
$$-\frac{m^4}{n^4}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\cdots\right)$$
$$-\frac{m^6}{n^6}\left(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{8^6}+\cdots\right)$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

8. Démontrer que l'on a

$$\operatorname{tg} x=\frac{2^3}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right)x$$
$$+\frac{2^5}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^4}\right)x^3$$
$$+\frac{2^7}{\pi^6}\left(\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^6}\right)x^5$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\operatorname{cotg} x=\frac{1}{x}-\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right)x$$
$$-\frac{2}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^4}\right)x^3$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

9. Développer $\operatorname{tg} x$ en série ordonnée par rapport aux puissances de x.

On partira de $\operatorname{tg} x\cos x=\sin x$, on remplacera $\sin x$ et $\cos x$ par leurs développements connus en série : en identifiant les deux membres, on déterminera les coefficients du développement.

On trouvera

$$\operatorname{tg} x=2^2(2^2-1)B_1\frac{x}{1.2}+2^4(2^4-1)B_2\frac{x^3}{4!}+\cdots+2^{2n}(2^{2n}-1)B_n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}+\cdots,$$

$$\operatorname{cotg} x=\frac{1}{x}-2^2B_1\frac{x}{1.2}-2^4B^2\frac{x^3}{4!}-\cdots-2^{2n}B_n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}-\cdots$$

où $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ sont les nombres de Bernoulli : $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \ldots$

10. Sommer, en s'appuyant sur les deux questions qui précèdent, les séries com prises dans les formules

$$\frac{1}{1^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^{2m}}+\ldots$$

$$\frac{1}{1^{2m}}+\frac{1}{2^{2m}}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^{2m}}+\cdots$$

où on donnera à m, successivement, les valeurs 1, 2, 3, ...

11. Démontrer les formules

$$\text{séc}\, x=\frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-x^2}-\frac{3\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2-x^2}+\frac{5\pi}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2-x^2}-\cdots,$$

$$\text{coséc}\, x=\frac{1}{x}+\frac{2x}{\pi^2-x^2}-\frac{2x}{(2\pi)^2-x^2}+\frac{2x}{(3\pi)^2-x^2}-\cdots$$

12. Démontrer les formules

$$x=\sin x+\frac{1}{2}\,\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\sin^5 x}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\sin^7 x}{7}+\cdots,$$

$$\frac{\pi}{2}-x=\cos x+\frac{1}{2}\,\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\cos^7 x}{7}+\cdots$$

13. Développer séc x et coséc x en séries ordonnées par rapport aux puissances croissantes de x : 1° au moyen de la formule de Mac-Laurin, 2° en développant chacun des termes des formules avant-dernières, décomposé préalablement en deux fractions simples.

14. Déduire de là les sommes des séries suivantes :

$$\frac{1}{1^{2m}}-\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}-\frac{1}{4^{2m}}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1^{2m+1}}-\frac{1}{3^{2m+1}}+\frac{1}{5^{2m+1}}-\frac{1}{7^{2m+1}}+\cdots,$$

où on donnera à m les valeurs successives 1, 2, 3, ...

15. Démontrer que l'on a

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots.$$

16. Développer en séries ordonnées par rapport aux puissances croissantes de x les expressions

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

et comparer les résultats aux développements de $\sin x$ et de $\cos x$. (Voyez, chapitre XIV, les fonctions hyperboliques.)

17. Établir les formules

$$\sin\frac{m\pi}{2n}=\frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n-m}{m}\right)\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\left(\frac{4n-m}{4n}\right)\left(\frac{4n+m}{4n}\right)\cdots,$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{3n-m}{3n}\right)\left(\frac{3n+m}{3n}\right)\left(\frac{5n-m}{5n}\right)\left(\frac{5n+m}{5n}\right)\cdots,$$

où $\frac{m\pi}{2n}$ est compris entre $\pm\frac{\pi}{2}$.

18. Démontrer la formule

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \frac{n-m}{2n}\,\pi\left(\frac{n+m}{2n}\right)\left(\frac{3n-m}{2n}\right)\left(\frac{3n+m}{2n}\right)\left(\frac{5n-m}{2n}\right)\left(\frac{5n+m}{2n}\right)\cdots.$$

19. Déduire des deux expressions de $\cos\frac{m\pi}{2n}$ données dans les deux questions précédentes la formule de Wallis.

20. Démontrer la formule

$$\frac{\pi}{2} = \frac{n}{m}\sin\frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n}{2n-m}\right)\left(\frac{2n}{2n+m}\right)\left(\frac{4n}{4n-m}\right)\left(\frac{4n}{4n+m}\right)\left(\frac{6n}{6n-m}\right)\frac{6n}{6n+m}\Big)\cdots.$$

21. Tirer de la formule précédente celle de Wallis.

22. Démontrer la formule

$$\sqrt{2} = \frac{2.2.6.6.10.10.14.14.18.18\ldots}{1.3.5.7.9.11.13.15.17.19\ldots}.$$

23. Démontrer que l'on a

$$\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n-m}\left(\frac{2n-m}{n+m}\right)\left(\frac{2n+m}{3n-m}\right)\left(\frac{4n-m}{3n+m}\right)\left(\frac{4n+m}{5n-m}\right)\cdots,$$

$$\operatorname{cotg}\frac{m\pi}{2n} = \frac{n-m}{m}\left(\frac{n+m}{2n-m}\right)\left(\frac{3n-m}{2n+m}\right)\left(\frac{3n+m}{4n-m}\right)\left(\frac{5n-m}{4n+m}\right)\cdots$$

24. De même, on a

$$\operatorname{séc}\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n}{n-m}\right)\left(\frac{n}{n+m}\right)\left(\frac{3n}{3n-m}\right)\left(\frac{3n}{3n+m}\right)\left(\frac{5n}{5n-m}\right)\left(\frac{5n}{5n+m}\right)\cdots,$$

$$\operatorname{cosec}\frac{m\pi}{2n} = \frac{n}{m}\left(\frac{n}{2n-m}\right)\left(\frac{3n}{2n+m}\right)\left(\frac{3n}{4n-m}\right)\left(\frac{5n}{4n+m}\right)\left(\frac{5n}{6n-m}\right)\cdots$$

25. Démontrer les deux formules suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n} = \frac{mn}{n^2-m^2}\\ &+\frac{m}{3^2n}+\frac{m^3}{3^4n^3}+\frac{m^5}{3^6n^5}+\cdots\\ &+\frac{m}{5^2n}+\frac{m^3}{5^4n^3}+\frac{m^5}{5^6n^5}+\cdots\\ &+\frac{m}{7^2n}+\frac{m^3}{7^4n^3}+\frac{m^5}{7^6n^5}+\cdots\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{4}\operatorname{cotg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{n}{2m}-\frac{mn}{4n^2-m^2}$$
$$-\left(\frac{m}{4^2n}+\frac{m^3}{4^4n^3}+\frac{m^5}{4^6n^5}+\cdots\right)$$
$$-\left(\frac{m}{6^2n}+\frac{m^3}{6^4n^3}+\frac{m^5}{6^6n^5}+\cdots\right)$$
$$-\left(\frac{m}{8^2n}+\frac{m^3}{8^4n^3}+\frac{m^5}{8^6n^5}+\cdots\right)$$
$$-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nota. — La plupart des formules que nous venons d'indiquer sont extraites de l'« *Introductio in analysin infinitorum* » d'Euler. Un certain nombre se trouvent également dans le *Précis* placé au début des tables de logarithmes de Callet. Il est facile, soit en les combinant, soit en attribuant aux lettres qui y entrent des valeurs particulières, d'en déduire un nombre considérable d'autres développements. D'autre part, il conviendra d'examiner si certains résultats, donnés succinctement, sont toujours exacts, quelles que soient les valeurs des lettres qui y entrent.

26. Condition de convergence de la série

$$1+\frac{1}{2}\alpha z+\frac{1.3}{2.4}\alpha^2z^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^3z^3+\cdots,$$

où $\alpha=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Donner sa somme.

27. Démontrer la formule

$$(1-2zx+z^2)^{-\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{1}{2}\alpha z+\frac{1.3}{2.4}\alpha^2z^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^3z^3+\cdots\right)$$
$$\times\left(1+\frac{1}{2}\beta z+\frac{1.3}{2.4}\beta^2z^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\beta^3z^3+\cdots\right),$$

où $x=\cos\varphi$, $\alpha=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $\beta=\cos\varphi-i\sin\varphi$.

28. Déduire de là l'expression des fonctions X_n de Legendre.

29. Démontrer la formule

$$\frac{\sin x}{x}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots$$

30. D'après la formule de Wallis, on a par exemple

$$\frac{3.3.5.5.7.7}{2.4.4.6.6.8}<\pi<\frac{3.3.5.5.7.7.9}{2.4.4.6.6.8.8}.$$

Wallis indique, pour abréger le calcul de π par ce procédé, qu'il faut considérer la suite

$$\frac{3.3.5.5}{2.4.4.6}\sqrt{1+\frac{1}{5}},\qquad \frac{3.3.5.5}{2.4.4.6}\sqrt{1+\frac{1}{6}},\qquad \frac{3.3.5.5.7.7}{2.4.4.6.6.8}\sqrt{1+\frac{1}{7}},$$
$$\frac{3.3.5.5.7.7}{2.4.4.6.6.8}\sqrt{1+\frac{1}{8}},\ \cdots$$

dont les termes sont approchés successivement par excès et par défaut.

31. Démontrer les formules

$$\sin z = z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 - \frac{1}{5040} z^7 + \ldots,$$

$$z = \sin z + \frac{1}{6} \sin^3 z + \frac{3}{40} \sin^5 z + \frac{5}{112} \sin^7 z + \ldots,$$

et donner des lois pour déterminer leurs coefficients.

Ces formules ont été découvertes en 1676 par Collins. A propos de la première, Leibniz écrit : « et posterior imprimis series elegantiam quandam singularem habeat ».

32. D'après Stern, de la formule

$$S = 1 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots,$$

on déduit, sans difficultés,

$$S = (1 + A_1) \frac{1 + A_1 + A_2}{1 + A_1} \frac{1 + A_1 + A_2 + A_3}{1 + A_1 + A_2} \ldots$$

33. De la formule

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots,$$

déduire

$$e = \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{206}{205} \cdot \ldots$$

34. De la formule

$$L\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots,$$

déduire

$$L\,2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{1.3} \cdot \frac{14}{4.5} \cdot \frac{94}{5.14} \cdot \ldots$$

35. De la formule

$$S = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \ldots \frac{a_n}{b_n} \cdot \ldots,$$

tirer la formule de Schweins,

$$S = \frac{a_1 - b_1}{b_1} \times \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2 - b_2}{b_2} \times \cdots \times \frac{a_1\, a_2 \ldots a_{n-1}}{b_1 . b_2 \ldots b_{n-1}} \cdot \frac{a_n - b_n}{b_n} \times \ldots$$

(Ces cinq questions proviennent des *Nouvelles Annales*.)

Au moyen de la formule de Mac-Laurin, établir les suivantes :

36. $$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{2^3 x^4}{4!} - \frac{2^5 x^6}{6!} + \frac{2^7 x^8}{8!} - \ldots$$

Vérifier ensuite en remarquant que $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$.

37. $$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5 . 3^2}{5!} + \frac{x^7\,(5.3)^2}{7!} + \frac{x^9 . (7.5.3)^2}{9!} + \cdots$$

Développer en séries ordonnées par rapport aux puissances croissantes de x les expressions :

38. $(\text{arc} \sin x)^2$.

39. $x \operatorname{cotg} x$.

40. $\mathrm{L} \dfrac{\sin x}{x}$.

41. $\mathrm{L}(1 + x^3)$.

42 $\sqrt[3]{1 - x}$.

43. $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x + x^2}}$.

44. Démontrer la formule

$$F(x) = F(0) + xF'(x) - \frac{x^2}{1.2} F''(x) + \cdots$$

(Série de Jacques Bernoulli.)

45. Démontrer la formule de Lagrange (1768) :

$$f(z) = f(a) + x\varphi(a)f'(a) + \frac{x^2}{1.2}\frac{d}{da}[\varphi(a)^2 f'(a)] + \frac{x^3}{3!}\frac{d^2}{da^2}[\varphi(a)^3 f'(a)] + \cdots,$$

où

$$z = a + x\varphi(z).$$

46. Appliquer la formule de Lagrange à la relation

$$z = a + \frac{x}{2}(z^2 - 1),$$

et en déduire le développement de

$$(1 - 2ax + x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

47. Développer une racine de

$$a - bx + cx^2 = 0,$$

suivant les puissances de c, en appliquant la formule de Lagrange à la relation

$$x = \frac{a}{b} + \frac{cx^2}{b}.$$

48. Développer en série ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x l'expression

$$e^{zx - z^2}.$$

49. Même question pour

$$\left(\frac{1 - x^n}{1 - x}\right)^2.$$

50. Même question pour

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

où f et φ sont deux polynomes entiers.

51. Même question pour

$$(1 - 2ax + x^2)^{-1}.$$

52. Même question pour

$$(1 + 2x \cos \theta + x^2)^{-2}.$$

53. Même question pour

$$L(x^2 + px + q).$$

54. Même question pour

$$L \frac{x^2 + px + q}{x^2 + p'x + q'}.$$

55. Développer au moyen de la formule de Lagrange z en série ordonnée suivant les puissances de x, sachant que

$$z = x + hz^n.$$

56. Même question pour

$$z = x + e \sin z,$$

où x désigne le temps, e l'excentricité de l'orbite d'une planète, z l'anomalie excentrique.

57. Développer suivant les puissances croissantes de y l'expression

$$(1 - 2xy + y^2)^{-\frac{1}{2}},$$

en posant

$$\sqrt{1 - 2xy + y^2} = 1 - yz,$$

et appliquant la formule de Lagrange à la fonction z. On trouve

$$1 + \frac{y}{1.2}\frac{d(x^2-1)}{dx} + \frac{y^2}{2!2^2}\frac{d^2(x^2-1)^2}{dx^2} + \frac{y^3}{3!2^3}\frac{d^3(x^2-1)^3}{dx^3} + \cdots + \frac{y^n}{n!2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} + \cdots$$

Etablir les formules

58. $$\lim \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n} = \frac{4}{e},$$

59. $$\lim \frac{1}{n^2}\sqrt{(n+1)(n+2)\ldots 3n} = \frac{27}{e^2},$$

60. $$\lim \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e},$$

où n est entier et augmente indéfiniment.

61. « Lorsque des nombres consécutifs, en nombre infini, croissent indéfiniment, de telle sorte que le rapport entre le dernier et le premier d'entre eux tende vers une limite $1 + h$, leurs moyennes arithmétique, géométrique et harmonique tendent, respectivement, à devenir proportionnelles aux trois quantités

$$1 + \frac{h}{2}, \qquad \frac{1}{e}(1+h)^{1+\frac{1}{h}}, \qquad \frac{h}{L(1+h)}. \text{ »}$$

Cas de h nul ou infini.

62. Démontrer que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{2}{3}.$$

63. Si les nombres entiers n et k augmentent sans cesse, mais de manière que le rapport $\frac{k}{n}$ tende vers une limite h, on a

$$\lim n\left[\frac{1}{n^2+(n+1)^2}+\frac{1}{n^2+(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+(n+k)^2}\right]=\operatorname{arc\,tg}(h+1)-\frac{\pi}{4}.$$

(Pour les six dernières questions, voyez LAISANT, *Ass. fr.*, Congrès d'Alger, 1881.)

64. « Formons une suite a, a', b, b', c, c',... dont les deux premiers termes soient $\frac{x^2-1}{2x}$, $2\frac{x-1}{x+1}$ et chacun des suivants alternativement moyen géométrique et moyen harmonique des deux précédents : si x surpasse 1, les termes de cette suite oscillent vers la limite Lx de manière à n'en différer qu'aussi peu qu'on veut.

« Soient p, p', q, q' quatre termes consécutifs de la série ; si $2p' > q$, on aura les limites plus resserrées

$$\frac{2p+p'}{3}, \qquad \frac{4q-p}{3} \text{ ».}$$

(AUBRY, *Journal de Math. Spéciales*, janvier 1894.)

65. Connaissant dans un triangle rectiligne les éléments a, b et c $(a > b)$, on a

$$\begin{cases} B=\frac{b}{a}\sin C+\frac{b^2}{2a^2}\sin 2C+\frac{b^3}{3a^3}\sin 3C+\frac{b^4}{4a^4}\sin 4C+\cdots, \\ Lc=La-\frac{b}{a}\cos C-\frac{b^2}{2a^2}\cos 2C-\frac{b^3}{3a^3}\cos 3C-\cdots \end{cases}$$

Employer les expressions des sinus et cosinus en exponentielles.

66. Connaissant dans un triangle sphérique les éléments a, b et c, on a

$$\begin{cases} \frac{A-B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}-\frac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}\sin C-\frac{\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}}{2\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}\sin 2C-\frac{\operatorname{tg}^3\frac{b}{2}}{3\operatorname{tg}^3\frac{a}{2}}\sin 3C-\cdots, \\ \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}+\frac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{a}{2}}\sin C-\frac{\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}}{2\operatorname{cotg}^2\frac{a}{2}}\sin 2C+\frac{\operatorname{tg}^3\frac{b}{2}}{3\operatorname{cotg}^3\frac{a}{2}}\sin 3C-\cdots \end{cases}$$

Examiner dans quels cas ces deux séries sont convergentes.

Partir des analogies de Néper.

67. On a aussi dans les mêmes conditions

$$\begin{cases} L\sin\frac{c}{2}=L\left(\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\right)-\frac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}\cos C-\frac{\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}}{2\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}\cos 2C-\cdots, \\ L\cos\frac{c}{2}=L\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\right)+\frac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{a}{2}}\cos C-\frac{\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}}{2\operatorname{cotg}^2\frac{a}{2}}\cos 2C+\cdots \end{cases}$$

(LEGENDRE, *Eléments de géométrie.*)

68. On a d'après Stirling

$$\frac{1}{z^2+nz}=\frac{1}{z(z+1)}+\frac{1-n}{z(z+1)(z+2)}+\frac{(2-n)(1-n)}{z(z+1)(z+2)(z+3)}$$
$$+\frac{(3-n)(2-n)(1-n)}{z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)}+\cdots$$

où n n'est pas forcément entier.

L'erreur commise en s'arrêtant au terme de rang p tend vers zéro si

$$z+n>0.$$

69. Étudier le produit infini

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots$$

En déduire la divergence de la série harmonique.

70. Étudier les produits infinis

$$P=(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ldots,$$
$$Q=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots$$

CHAPITRE XII

RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS ET LES RACINES D'UNE ÉQUATION. — TRANSFORMATION ET ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS. — FONCTIONS SYMÉTRIQUES. — ÉLIMINATION.

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — *Si l'équation entière* $f(x) = 0$ *a toutes ses racines réelles, l'équation* $ff'' - f'^2 = 0$ *a toutes ses racines imaginaires.*

La propriété est vraie si f est du second degré. Supposons qu'on l'ait établie pour un polynome de degré $p-1$, il suffira de montrer qu'elle est vraie pour un polynome de degré p.

Soit donc ψ un polynome de degré p, α une racine de $\psi = 0$. On aura $\psi(x) = (x-\alpha)\varphi(x)$, φ étant un polynome de degré $p-1$, auquel s'applique le théorème. Or

$$\psi\psi'' - \psi'^2 = (\varphi\varphi'' - \varphi'^2)(x-\alpha)^2 - \varphi^2;$$

il faut donc, si $\psi\psi'' - \psi'^2$ peut devenir nul, que l'on ait

$$(\varphi\varphi'' - \varphi'^2)(x-\alpha)^2 = \varphi^2;$$

le deuxième membre est >0, $(x-\alpha)^2$ aussi, et $\varphi\varphi'' - \varphi'^2$ a un signe constant ; montrons que ce signe est le signe $-$.

Soit A_0x^m le premier terme de ψ, le premier de ψ' est mA_0x^{m-1}, le premier de ψ'' est $mA_0(m-1)x^{m-2}$, et le terme du plus haut degré dans $\varphi\varphi'' - \varphi'^2$ est $-mA_0^2x^{2m-2}$, toujours de signe $-$.

Ainsi il ne pourrait y avoir de racines réelles que si les deux membres étaient nuls séparément, et cela n'arrivera pas si $f = 0$ a toutes ses racines distinctes.

Question II. — *Conditions pour que l'équation*

$$x^5 + 10px^2 + 5qx + r = 0$$

ait une racine triple.

Je rends cette équation homogène; elle devient

$$f(x, y) = x^5 + 10px^2y^3 + 5qxy^4 + ry^5 = 0.$$

Il suffit d'exprimer que les équations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

où l'on a fait $y = 1$, ont une racine commune.

On est ainsi ramené à éliminer x entre les équations

$$x^3 + p = 0,$$
$$3px + q = 0,$$
$$3px^2 + 3qx + r = 0,$$

ce qui donne les deux conditions

$$\begin{cases} -q^3 + 27p^4 = 0, \\ 3pr - 2q^2 = 0. \end{cases}$$

Question III. — *Condition pour que les racines de l'équation*

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

soient en progression géométrique.

Soient x', $x'\rho$ et $x'\rho^2$ les trois racines. Nous avons les relations

$$\begin{cases} x' + x'\rho + x'\rho^2 = -p, \\ x'^2\rho + x'^2\rho^2 + x'^2\rho^3 = q, \\ x'^3\rho^3 = -r. \end{cases}$$

Divisant les deux premières membre à membre, puis comparant à la troisième, il vient

$$q^3 - p^3r = 0.$$

Question IV. — *Entre deux racines d'une équation algébrique, on a la relation* $\frac{x'x''}{x' + x''} = 1$. *S'en assurer et abaisser le degré de l'équation.*

Soit $f(x) = 0$ l'équation donnée; nous avons par hypothèse

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = 1.$$

Prenons alors la transformée en $\frac{1}{x}$, soit $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, et posons $\frac{1}{x} = y$; entre deux racines y' et y'' de $f(y) = 0$, nous aurons la relation

$$y' + y'' = 1.$$

Cela posé, nous pourrons opérer de deux manières :

Première méthode. — Les équations

$$f(y) = 0,$$
$$f(1 - y) = 0$$

ont au moins une racine commune : leur plus grand commun diviseur $\psi(y)$ est au moins du premier degré (sinon la relation supposée n'aura pas lieu entre deux racines). On sera ramené à résoudre

$$\psi(y) = 0$$

et

$$\frac{f(y)}{\psi(y)} = 0,$$

équations de degré moindre que f.

La méthode est en défaut quand toutes les racines de $f(y) = 0$ se groupent de manière à vérifier $y' + y'' = 1$. Mais alors on pose

$$z = y - \frac{1}{2},$$

d'où

$$z' + z'' = 0,$$

en désignant par z' et z'' deux racines de l'équation en z. Ainsi cette dernière équation a ses racines égales deux à deux et de signes contraires, et en posant $z^2 = \xi$, son degré s'abaisse de moitié.

Deuxième méthode. — On procédera comme il va être dit pour le problème suivant.

Question V. — *Entre deux racines d'une équation algébrique, on a la relation* $x'x'' = 3$. *S'en assurer et abaisser le degré de l'équation.*

Soit $f(x) = 0$ l'équation et soit

$$x' + x'' = S.$$

Aux deux racines x' et x'' correspond un diviseur du second degré

$$x^2 - Sx + 3;$$

alors on divisera $f(x)$ par $x^2 - Sx + 3$: le reste étant du premier

degré, on l'égalera identiquement à zéro, et on aura ainsi deux équations

$$\begin{cases} \varphi(S) = 0, \\ \psi(S) = 0. \end{cases}$$

Ensuite on cherchera le plus grand commun diviseur $\chi(S)$ entre φ et ψ (s'il n'en existait pas, il n'y aurait pas de racines répondant à la relation donnée). On égalera ce plus grand commun diviseur $\chi(S)$ à zéro, et en résolvant l'équation obtenue, on aura un certain nombre de valeurs pour S, et par suite un certain nombre de couples de racines correspondantes. En supprimant ces racines dans $f(x) = 0$, on aura une équation de degré moindre $f_1(x) = 0$.

Discussion. — Le nombre des diviseurs du second degré de $f(x)$ est $\frac{m(m-1)}{2}$, si m est le degré de f. On conçoit donc que le degré de χ puisse être supérieur ou inférieur à celui de f, suivant le nombre des racines qui vérifiaient la relation donnée. Ainsi la méthode qui précède peut ne pas être avantageuse. En tous cas, on pourra toujours considérer les équations

$$f(x) = 0,$$

$$f\left(\frac{3}{x}\right) = 0,$$

dont le résultant égalé à zéro donnera les racines telles que x' et x''.

Enfin, dans le cas particulier où toutes les racines de $f(x) = 0$ se grouperont de manière à vérifier

$$x'x'' = 3,$$

on posera

$$y = x\sqrt{3},$$

et en désignant par y' et y'' deux racines de la transformée, on aura

$$y'y'' = 1.$$

Ainsi la transformée sera réciproque, et on saura abaisser son degré de moitié.

Question VI. — *Calculer le produit des carrés des différences des racines de l'équation* $x^m + px^{m-1} + q = 0$.

$f(x) = 0$ étant une équation de degré m, dont le premier coefficient est 1, et $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant les racines de sa dérivée, on a pour le produit P des carrés des différences l'expression

$$P = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} m^m f(\alpha) f(\beta) \ldots f(\lambda).$$

Ici la dérivée de $f(x) = 0$ est

$$mx^{m-1} + p(m-1)x^{m-2} = 0,$$

qui admet $(m-2)$ fois la racine 0, et une fois la racine $\frac{1-m}{m}p$.
On aura donc

$$P = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} q^{m-2}[p^m(1-m)^{m-1} + qm^m].$$

La vérification se fait facilement pour $p = 2$.

Question VII. — *On donne l'équation*

$$(1) \qquad A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m = 0,$$

et sa transformée en $\frac{1}{x}$

$$(2) \qquad A_mx^m + A_{m-1}x^{m-1} + \cdots + A_0 = 0;$$

on suppose que l'on sache trouver pour l'une le produit des carrés des différences des racines : trouver cette expression pour l'autre. Appliquer à

$$x^m + px + q = 0.$$

Soit P le produit des carrés des différences des racines de (1), Q celui de (2). A un facteur $(a-b)^2$ de P, correspondra dans Q le facteur $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{a^2b^2}$. Ainsi

$$Q = \frac{P}{a^2b^2 . a^2c^2 \ldots a^2l^2 . b^2c^2 \ldots b^2l^2 \ldots k^2l^2},$$

(a, b, c, ..., k, l étant les racines de $f(x) = 0$),
ou

$$Q = \frac{P}{(a.b \ldots l)^{2(m-1)}}.$$

Comme $a\ b \ldots l = (-1)^m \frac{A_m}{A_0}$, on aura

$$Q = P\left(\frac{A_0}{A_m}\right)^{2(m-1)}.$$

En faisant l'application, on trouve

$$Q = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \frac{1}{q^{m-1}} \left[p^m\left(\frac{1-m}{q}\right)^{m-1} + m^m\right],$$

et

$$P = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} m^m q^{m-1} \left[p^m\left(\frac{1-m}{q}\right)^{m-1} + m^m\right].$$

Question VIII. — *On donne l'équation*

$$ax^4 + (b - 4a)x^3 - (11a + 4b)x^2 + (30a - 11b)x + 30b = 0;$$

entre deux racines x' et x'' on a la relation $x'x'' = 10$. Résoudre l'équation.

On a par hypothèse

$$(x - x')(x - x'') = x^2 - (x' + x'')x + 10.$$

Il suffit d'exprimer que le premier membre de l'équation est le produit de $x^2 + \lambda x + 10$ par un autre facteur du deuxième degré, en employant la méthode des coefficients indéterminés.

Si l'on pose pour abréger $\frac{b}{a} = \rho$, on doit avoir

$$x^4 + (\rho - 4)x^3 - (4\rho + 11)x^2 + (30 - 11\rho)x + 30\rho$$
$$= (x^2 + \lambda x + 10)(x^2 + \mu x + \nu);$$

en identifiant, il vient

$$\begin{cases} \lambda + \mu = \rho - 4, \\ \lambda\mu + \nu + 10 = -11 - 4\rho, \\ \lambda\nu + 10\mu = 30 - 11\rho, \\ 10\nu = 30\rho; \end{cases}$$

en résolvant, on arrive à mettre le premier membre de l'équation donnée sous la forme

$$(x^2 - 7x + 10)[x^2 + (\rho + 3)x + 3\rho] = 0.$$

Les quatre racines sont

$$2, \quad 5, \quad -3 \quad \text{et} \quad -\frac{b}{a}.$$

Question IX. — *On donne l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ dont les racines sont α, β et γ. On demande de former l'équation qui admet pour racines*

$$\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}, \qquad \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}.$$

On a
$$\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta\gamma} = \frac{(\beta + \gamma)^2}{\beta\gamma} - 2,$$

ou, puisque
$$\alpha + \beta + \gamma = -p$$

et que
$$\alpha\beta\gamma = -r,$$

$$\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} = -\frac{(p + \alpha)^2}{r}\alpha - 2 = -\frac{p\alpha^2 + (p^2 - q)\alpha + 2r}{r}.$$

L'équation demandée s'obtiendra par la transformation

$$y = -\frac{px^2 + (p^2 - q)x + r}{r},$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$y = \frac{q^2x + r(p^2 - r)}{r(px + q)}.$$

On déduit de là, les deux termes de la fraction étant linéaires en x,

$$x = \frac{p^2 - r - qy}{py - \frac{q^2}{r}}.$$

L'équation cherchée est

$$\left(\frac{p^2 - r - qy}{py - \frac{q^2}{r}}\right)^3 + p\left(\frac{p^2 - r - qy}{py - \frac{q^2}{r}}\right)^2 + q\frac{p^2 - r - qy}{py - \frac{q^2}{r}} + r = 0.$$

Question X. — *On donne $f(x) = 0$, dont les racines sont $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; former l'équation qui admet pour racines $\alpha + \frac{1}{\alpha}$, $\beta + \frac{1}{\beta}$, ... Appliquer à $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.*

Prenons l'équation $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$: elle ne change pas quand on remplace x par $\frac{1}{x}$, donc elle est réciproque. Si on pose alors $x + \frac{1}{x} = y$, l'équation en y sera l'équation cherchée.

En appliquant à l'exemple proposé, on trouve

$$ry^3 + (pr + q)y^2 + (pq + p + qr - 3r)y + (p - r)^2 + (1 - q)^2 = 0.$$

Question XI. — Généralisation de la formule $\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{1}{x - l}$.

Soit $f(x) = (x - a)(x - b) \ldots (x - l)$.

Les trois suites de termes

$$(1) \qquad f(x), \quad \frac{f'(x)}{1}, \quad \frac{f''(x)}{1.2}, \quad \ldots, \quad \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}, \quad \frac{f^{(n)}(x)}{n!};$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{ll} (x - a)(x - b) \ldots (x - l), & \sum (x - b)(x - c) \ldots (x - l), \\ \sum (x - c) \ldots (x - l), \ldots, & \sum (x - l), \quad 1; \end{array} \right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ll} 1, \quad \sum \frac{1}{x-l}, & \sum \frac{1}{(x-k)(x-l)}, \ldots, \\ \sum \frac{1}{(x-b)(x-c)\ldots(x-l)}, & \frac{1}{(x-a)(x-b)\ldots(x-l)} \end{array}\right.$$

sont proportionnelles pour toute valeur de x. Ainsi on aura par exemple

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{1}{x-l}, \qquad \frac{f''(x)}{2f(x)} = \sum \frac{1}{(x-k)(x-l)}, \ldots$$

En effet, d'après la formule de Taylor,

$$f(\lambda - x) = f(\lambda) - \frac{x}{1} f'(\lambda) + \frac{x^2}{2!} f''(\lambda) - \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} f^{(n)}(\lambda),$$

où λ est un paramètre arbitraire.

Mais l'équation $f(\lambda - x) = 0$ a pour racines

$$\lambda - a, \quad \lambda - b, \ldots, \quad \lambda - l.$$

Si on lui applique les relations qui existent entre les coefficients et les racines, il vient

$$\sum(\lambda - l) = \frac{\frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\lambda)}{\frac{1}{n!} f^{(n)}(\lambda)}, \qquad \sum(\lambda-k)(\lambda-l) = \frac{\frac{1}{(n-2)!} f^{(n-2)}(\lambda)}{\frac{1}{n!} f^{(n)}(\lambda)}, \ldots;$$

ce qui démontre que les deux premières suites sont proportionnelles, puisque λ est quelconque.

Pour achever d'établir la proposition, il suffit d'appliquer les mêmes relations à la transformée en $\frac{1}{x}$ de l'équation $f(\lambda - x) = 0$, transformée qui est

$$x^n f(\lambda) - \frac{x^{n-1}}{1} f'(\lambda) + \frac{x^{n-2}}{2!} f''(\lambda) - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}(\lambda) = 0,$$

ce qui donne

$$\sum \frac{1}{\lambda - l} = \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}, \qquad \sum \frac{1}{(\lambda-k)(\lambda-l)} = \frac{\frac{1}{2!} f''(\lambda)}{f(\lambda)}, \ldots.$$

Ainsi les suites (1) et (3) sont aussi proportionnelles.

D'autre part, il est clair que la suite (3) se déduit de la suite (2) en divisant tous ses termes par $(x-a)(x-b)\ldots(x-l)$.

(Rédigé d'après une communication de M. Laisant.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1. Faire disparaître le second terme de l'équation
$$x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0.$$

2. Faire disparaître le troisième terme de l'équation
$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 5x - 2 = 0.$$

3. Transformer l'équation
$$x^3 - 2x + \sqrt{3} = 0$$
en une autre du même degré à coefficients rationnels.

Ces trois exemples sont donnés par Newton.

4. $$\frac{x-a}{2}\left[f'(x) + f'(a)\right] - f(x) + f(a),$$
où $f(x)$ est un polynome entier, est divisible par $(x-a)^3$.

5. A et B étant deux polynomes premiers entre eux, A′ et B′ leurs dérivées, si $A^2 + B^2 = 0$ a une racine double, cette racine appartient à $A'^2 + B'^2 = 0$.

6. L'unité est racine simple de
$$(x-1)^2 x^{n-2} - (x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + 1) = 1 - n.$$

7. Soit l'équation
$$2x^5 - 3x^3 + ax^2 - bx + 5 = 0\ ;$$
trouver la relation qui doit exister entre a et b pour que deux racines x' et x'' puissent satisfaire à la relation
$$x' + \frac{2}{x''} = 3.$$

8. Dans l'équation
$$x^4 + mx^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0,$$
déterminer m pour que la somme de deux racines soit égale à 3.

9. Dans l'équation
$$x^4 + \lambda x^3 + 5x^2 - 3x + 4 = 0,$$
déterminer λ pour que le produit de deux racines soit égal à 1.

10. Déterminer les coefficients de l'équation
$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$
pour qu'une racine égale la somme de deux autres.

11. Soit l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0 ;$$

si a est racine et que $ab = a + b$, condition pour que b soit racine.

12. Exprimer que dans l'équation

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + ax + b = 0$$

une des quatre racines est double de l'autre et sur les deux restantes une triple de l'autre.

13. Déterminer p, q, r pour que l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

ait une racine triple.

14. Déterminer λ pour que l'équation

$$x^2 + 3x + 1 + \lambda(x^3 - 1) = 0$$

ait une racine double.

15. Même question pour

$$x^5 + \lambda x^4 + 10x^3 + 1 = 0.$$

16. Conditions pour que l'équation

$$x^4 + 6px^2 + 4qx + r = 0$$

ait seulement deux racines distinctes.

17. Exprimer que l'équation

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + d = 0$$

a ses racines en progression arithmétique.

18. Exprimer qu'une équation du cinquième degré a une racine triple et une racine double.

19. Peut-on déterminer p, q, r de telle sorte que l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

ait précisément pour racines p, q, r ?

20. Condition pour que

$$x^4 + 6ax^2 + bx + c = 0$$

ait une racine double.

Résultat $$\left[\frac{2}{3}(3a^2 + c)\right]^3 - \left(\frac{b^2 + 16a^3 - 16ac}{2}\right)^2 = 0.$$

(WEILL.)

21. Conditions pour que la même équation ait une racine triple.

Résultat $$\begin{cases} 3a^2 + c = 0, \\ b^2 + 16a^3 - 16ac = 0. \end{cases}$$

(WEILL.)

22. On considère l'équation

$$x^4 + px^2 + 4qx + r = 0,$$

et on suppose qu'elle ait seulement deux racines distinctes, la résoudre.

23. On sait que deux racines de l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

sont inverses l'une de l'autre : en profiter pour abaisser le degré de l'équation.

24. Dans l'équation

$$x^4 + \lambda x^3 + \mu x^2 + \nu x - 1 = 0,$$

on sait que la somme de deux racines est nulle : abaisser le degré de l'équation.

25. Résoudre complètement l'équation

$$x^4 - 3x^2 + 2x + \alpha = 0,$$

sachant que cette équation a une racine double.

26. Étant donnée l'équation

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4 = 0,$$

en former une nouvelle dont chaque racine y_1 soit liée à chaque racine x_1 de la proposée par la relation

$$x_1 = \frac{y_1}{y_1 - 1}.$$

Expliquer pourquoi l'équation obtenue est du troisième degré.

27. Étant donnée l'équation

$$x^m + px^n + q = 0,$$

en former une nouvelle qui admette pour racines les rapports des racines de la proposée, prises deux à deux.

28. Comment peut-on ramener l'étude des racines d'une équation comprises entre a et b à l'étude des racines comprises entre $-\infty$ et $+\infty$?

On fait la *transformation de Jacobi* : $y = \frac{a-x}{x-b}$. $(a > b)$.

29. Calculer $\Sigma x'^2 x''^2$, x' et x'' étant deux racines de l'équation

$$x^6 + px^4 + qx^2 + r = 0.$$

30. Calculer $\Sigma a^2 b^2$, a et b étant deux racines de l'équation

$$x^3 - 2x - 2 = 0.$$

31. Calculer $\sum \frac{a}{b}$, a et b étant deux racines de l'équation

$$x^3 - 2x - 1 = 0.$$

32. Calculer $\sum \frac{a}{1+a}$, a étant une racine de l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

33. a, b, c étant les racines de la dernière équation, calculer $\sum \frac{ab}{c}$.

34. Soit l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

trouver la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de ses racines.

35. Soit l'équation

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0.$$

Trouver la somme des carrés, la somme des cubes, la somme des racines quatrièmes de ses racines.

(NEWTON.)

36. Soit l'équation $x^3 + qx + r = 0$: trouver la fonction symétrique de ses racines a, b, c, représentée par $\Sigma a^2 b^3$.

On a en général $\Sigma a^\alpha b^\beta = S_\alpha S_\beta - S_{\alpha+\beta}$,

et ici $\Sigma a^2 b^3 = S_2 S_3 - S_5$.

On trouvera $S_2 = -2q$, $S_3 = -3r$, $S_5 = 5qr$,

et enfin $\Sigma a^2 b^3 = qr$.

37. Soit a une racine quelconque de l'équation entière $f(x) = 0$. On a

$$\Sigma\left(\frac{1}{1+a}\right) = -\frac{f'(-1)}{f(-1)}.$$

38. Si a, b, c sont les racines de $x^3 + px + q = 0$, former

$$\Sigma \frac{a^2}{(b+1)(c+1)}.$$

39. Si a, b, c sont les racines de $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, former l'équation qui a pour racines $a + \frac{1}{a}$, $b + \frac{1}{b}$, $c + \frac{1}{c}$. Trouver

$$\Sigma\left(a + \frac{1}{a}\right).$$

40. Soient m quantités $a, b, c, \ldots, l$. On désigne par S_p^a la somme des produits p à p des $(m-1)$ quantités $b, c, \ldots, l$. Calculer la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ S_1^a & S_1^b & \ldots\ldots & S_1^l \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m-1}^a & S_{m-1}^b & \ldots\ldots & S_{m-1}^l \end{vmatrix}.$$

41. Exprimer qu'une équation donnée $\varphi(x) = 0$ est une équation aux carrés

des différences des racines d'une équation $f(x) = 0$ qui est inconnue et qu'il est possible également de former.

42. Étant données deux équations algébriques, chacune à une inconnue, trouver une troisième équation qui ait pour racines les différences que l'on obtient en retranchant successivement chaque racine de la seconde équation de chaque racine de la première.

(*Nouvelles Annales.*)

43. Trouver une équation dont les racines soient les différences des racines des équations

$$x^2 + px + q = 0, \qquad x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

(*Nouvelles Annales.*)

44. Soient les deux équations

$$x^3 - 2x + 5 = 0, \qquad x^4 - 3x^2 + 7 = 0.$$

Trouver une troisième équation dont les racines soient les sommes deux à deux des racines de la première avec les racines de la seconde. L'équation est du douzième degré, est-elle susceptible d'abaissement ?

(*Nouvelles Annales.*)

45. Exprimer chaque racine d'une équation du deuxième, du troisième ou du quatrième degré en fonction symétrique de toutes les racines.

(Jacobi, *Journal de Crelle.*)

46. Entre deux racines d'une équation $f(x) = 0$ on a la relation $x' + x'' = s$. Abaisser l'équation.

47. Examiner en particulier le cas d'une équation de degré $2n$, dont les racines se divisent en n groupes de deux vérifiant tous cette relation. Dans ce cas, remarquer avec J. Vieille (*Nouvelles Annales*) que la division de $f(x)$ par $x^2 - sx + \lambda$ conduit à un reste indépendant de x.

48. Résoudre les équations

$$\begin{cases} x^m + y^m + z^m + u^m = a, \\ x^n + y^n + z^n + u^n = b, \\ x^p + y^p + z^p + u^p = c, \\ x^q + y^q + z^q + u^q = d. \end{cases}$$

Soit $S_{p,n}$ la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des n premiers nombres entiers. Démontrer qu'on a

49. $$S_{4,n} = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}.$$

50. $$S_{5,n} = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}.$$

51. $$S_{6,n} = \frac{6n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + n}{42}.$$

52. $$S_{7,n} = \frac{3n^8 + 12n^7 + 14n^6 - 7n^4 + 2n^2}{24}.$$

53. $$S_{8,n} = \frac{10n^9 + 45n^8 + 60n^7 - 42n^5 + 20n^3 - 3n}{90}.$$

54 $$S_{9,n} = \frac{2n^{10} + 10n^9 + 15n^8 - 14n^6 + 10n^4 - 3n^2}{20}.$$

55 $$S_{10,n} = \frac{6n^{11} + 33n^{10} + 55n^9 - 66n^7 + 66n^5 - 33n^3 + 5n}{66}.$$

56. $$S_{11,n} = \frac{2n^{12} + 12n^{11} + 22n^{10} - 33n^8 + 44n^6 - 33n^4 + 10n^2}{24}.$$

57. $$5S_{4,n} = 6S_{1,n}.S_{2,n} - S_{2,n}.$$

58. $$3S_{5,n} = 4S_{1,n}.S_{3,n} - S_{3,n}.$$

59. $$2S_{5,n} = 3S_{2,n}^2 - S_{3,n}.$$

60. $$7S_{6,n} = 12S_{2,n}.S_{3,n} - 5S_{4,n}.$$

61. $$S_{7,n} = 2S_{3,n}^2 - S_{5,n}.$$

62. $$2S_{11,n} = 6S_{5,n}^2 - 5S_{9,n} + S_{7,n}.$$

(E. Barbette, *Mathesis*, mai 1894; A.-S. Ramsey, *Int. des math.*, p. 29; Cesaro, *Int. des math.*, p. 136.)

63. Si une équation $f(x) = 0$, dont les racines sont $a, b, \ldots, l$, a une racine a commune avec $f''(x) = 0$, et qui n'appartient pas à $f'(x) = 0$, on a identiquement

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \cdots + \frac{1}{a-l} = 0.$$

64. Il en résulte que si une équation du troisième degré a une racine simple commune avec sa dérivée seconde, les trois racines sont en progression par différence.

(Laisant.)

65. « Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les racines d'une équation entière, et $b_2, b_3, \ldots, b_n$ les racines de sa dérivée, on a l'identité

$$\frac{1}{a_1 - a_2} + \frac{1}{a_1 - a_3} + \cdots + \frac{1}{a_1 - a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1 - b_2} + \frac{1}{a_1 - b_3} + \cdots + \frac{1}{a_1 - b_n}\right),$$

a_1 étant une racine quelconque. » (Catalan).

66. Plus généralement, soit $f(x)$ une équation de degré $n+p$, ayant pour racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. En posant

$$F(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n),$$
$$\Phi(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_p),$$

puis en appelant

$b_2, b_3, \ldots, b_{n+p}$ les racines de $f'(x) = 0$,
$a'_2, a'_3, \ldots, a'_n$ celles de $F'(x) = 0$,
$\alpha'_2, \alpha'_3, \ldots, \alpha'_p$ celles de $\Phi'(x) = 0$,

on a identiquement

$$S_b = \frac{S_a S'_a + 2S_a S_\alpha + S_\alpha S'_\alpha}{S_a + S_\alpha},$$

où les symboles tels que S_b désignent les quantités analogues à $\Sigma\left(\frac{1}{x-b_k}\right)$.

(LAISANT)

67. La forme la plus générale d'un polynome entier $F(x)$ satisfaisant aux relations

$$F(1-x) = F(x),$$
$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{F(x)}{x^m}$$

est

$$F(x) = (x^2-x)^{2p}(x^2-x+1)^q \times \left\{\begin{array}{l} A_0(x^2-x+1)^{3n} + A_1(x^2-x+1)^{3(n-1)}(x^2-x)^2 \\ +A_2(x^2-x+1)^{3(n-2)}(x^2-x)^4 + \cdots + A^n(x^2-x)^{2n} \end{array}\right\}.$$

(*Concours général, 1874.*)

68. Démontrer que si toutes les racines d'une équation $f(x) = 0$, d'un degré impair m, sont des nombres en progression géométrique, la racine $m^{\text{ième}}$, changée de signe, du terme tout connu de l'équation est une racine de l'équation.

(G. de LONGHAMPS : *Algèbre.*)

69. Exprimer, au moyen des fonctions symétriques, que les équations

$$x^3 + px + q = 0,$$
$$x^2 + p'x + q' = 0$$

ont une racine commune.

70. Même question pour les équations

$$x^4 + x + a = 0,$$
$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

71. Éliminer z entre les équations

$$x^2 + z^2 + 2yz - 4x - 4z + 4 = 0,$$
$$2y^2 + z^2 - 2xz - 4z + 4 = 0.$$

72. Éliminer x entre les équations

$$x^3 + x^2 - 1 = 0,$$
$$x^5y^4 - x^4(1+y^4) - 1 + y^3 = 0.$$

73. Éliminer x entre les équations

$$2x^5 - 4x^3 - 7x + 1 = 0,$$
$$2x^5 - 4x^3 + ax^2 - 7x + 1 = 0.$$

74. Éliminer x, puis y entre les équations

$$x^2 + y^2 - 2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2 + (x + y - 2)(2x + y - 1) = 0.$$

75. Éliminer λ et μ entre les équations

$$x(1 + \lambda) = R\mu,$$
$$y(1 + \mu) = R\lambda,$$
$$\lambda^2 + \mu^2 = 1.$$

(G. de LONGCHAMPS : *Algèbre.*)

76. Éliminer φ entre les équations

$$x = a \cos\varphi\,(1 + 2 \sin^2 \varphi),$$
$$y = b \sin\varphi\,(1 + 2 \cos^2 \varphi).$$

Ces équations représentent l'enveloppe des symétriques des tangentes à une ellipse par rapport à l'ordonnée.

77. Déterminer une fonction entière φ de p et de q telle que pour k entier quelconque on ait

$$\varphi(kp, q) = \varphi(p, kq) = k\varphi(p, q).$$

Application à l'évaluation de la surface du rectangle. Calcul analogue pour le parallélépipède.

78. Démontrer que la fonction symétrique

$$\varphi(a) + \varphi(b) + \cdots + \varphi(l)$$

des racines de l'équation $f(x) = 0$ est le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le quotient

$$\frac{f'(x)\varphi(x)}{f(x)}.$$

CHAPITRE XIII

APPLICATION DES THÉORÈMES DE DESCARTES, DE ROLLE, DE BUDAN ET FOURIER, DE STURM. — RECHERCHE DES RACINES COMMENSURABLES ET DES RACINES ÉGALES. — QUELQUES ÉQUATIONS QUE L'ON SAIT RÉSOUDRE.

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — *L'équation* $\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{1+x^2} = m$ *a-t-elle des racines réelles ?*

Je supposerai, pour éviter toute ambiguïté, que x allant de $-\infty$ à $+\infty$, $\operatorname{arc\,tg} x$ varie d'une manière continue de $k\pi - \frac{\pi}{2}$ à $k\pi + \frac{\pi}{2}$, k étant un nombre entier déterminé. La fonction

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{1+x^2} - m$$

est ainsi continue, et le théorème de Rolle s'y applique. Sa dérivée est

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x)^2}{(1+x^2)^2},$$

elle admet comme racines $\pm\infty$ et -1; la racine -1 est double : il est inutile de la substituer dans f.

La proposée peut admettre comme racines $\pm\infty$: il faut évidemment pour cela $m = h\pi + \frac{\pi}{2}$ (h entier quelconque).

Écartons ce cas particulier et examinons si $f(x)$ peut avoir des signes contraires pour $x = -\infty$ et $x = +\infty$. Il suffit pour cela qu'on puisse choisir k de façon que m soit compris entre $k\pi + \frac{\pi}{2}$ et $k\pi - \frac{\pi}{2}$.

Cela étant toujours possible, l'équation $f(x) = 0$ admet une racine réelle et une seule.

Question II. — *Résoudre* $x^{11} - 1 = 0$. *Appliquer le théorème de Sturm à l'équation abaissée.*

Cette équation a une racine réelle et dix imaginaires, données par la formule

$$x = \cos\frac{2k\pi}{11} + i\sin\frac{2k\pi}{11}. \qquad (k \text{ variant de } 0 \text{ à } 10)$$

Le théorème de Sturm permet de retrouver ce résultat. L'équation admet en effet la racine $x = 1$. Si on supprime celle-ci, on a

$$(1) \qquad x^{10} + x^9 + \ldots\ldots + x + 1 = 0,$$

équation réciproque qui s'abaisse au cinquième degré en posant $x + \frac{1}{x} = y$; elle devient alors

$$(2) \qquad y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0.$$

Les fonctions de Sturm sont :

$$\begin{aligned}
&y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1,\\
&5y^4 + 4y^3 - 12y^2 - 6y + 3,\\
&4y^3 + 3y^2 - 6y - 2,\\
&3y^2 + 2y - 2,\\
&2y + 1,\\
&9.
\end{aligned}$$

La suite de Sturm est complète, et les premiers coefficients des fonctions qui la composent ont un signe constant $+$, donc l'équation (2) a toutes ses racines réelles.

Soit y_1 une de ces racines : il lui correspond deux racines de (1), définies par l'équation

$$x + \frac{1}{x} = y_1,$$

ou

$$(3) \qquad x - xy_1 + 1 = 0;$$

cette équation aura ses racines réelles si $y_1 - 4 > 0$, ou si y est en valeur absolue supérieure à 2. Or si on substitue -2 dans la suite de Sturm, on a les signes

$$+ \qquad + \qquad + \qquad + \qquad + \qquad +;$$

en substituant 2, on a

$$- \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + ;$$

donc toutes les racines de (2) sont comprises entre -2 et $+2$: les équations telles que (3) auront leurs racines imaginaires, et (1) n'aura pas de racines réelles.

Question III. — *Trouver une limite supérieure des racines positives de l'équation*

$$f(x) = x^5 - 10x^4 - 32x^3 + 7x^2 - 500x - 120 = 0.$$

1° La méthode de Mac-Laurin donne ici 501, puisque le plus grand coefficient négatif est 500 ;

2° Appliquons la méthode de Newton, qui donne le plus petit nombre entier répondant à la question :

$$f'(x) = 5x^4 - 40x^3 - 96x^2 + 14x - 500,$$

$$\frac{1}{2} f''(x) = 10x^3 - 60x^2 - 96x + 7,$$

$$\frac{1}{12} f'''(x) = 5x^2 - 20x - 16,$$

$$\frac{1}{24} f^{\text{IV}}(x) = 5x - 10,$$

$$\frac{1}{24} f^{\text{V}}(x) = 5.$$

Pour $x > 2$, f^{V} et f^{IV} sont > 0 ; mais f''' ne l'est pas ; j'essaie 3, 4, 5 ; pour $x > 5$, les trois dernières dérivées sont > 0. J'essaie dans f'' les nombres 5, 6, 7, 8 : pour $x > 8$, les quatre dernières dérivées sont > 0. Je fais, dans $f'(x)$, $x = 8$, $x = 9$, $x = 10$: on voit que $x > 10$ rend positives toutes les dérivées. Je fais, dans $f(x)$, $x = 10$, $x = 11$, $x = 12$, $x = 13$; on voit enfin que 13 est une limite supérieure des racines positives de l'équation ;

3° Voyons ce que donne la méthode de Lagrange. Nous pouvons écrire

$$f(x) = (x^5 - 10x^4 - 32x^3) + (7x^2 - 500x - 120),$$

les deux groupes ainsi formés présentant ainsi chacun une seule variation. Dans ces conditions, 72 est le plus petit nombre rendant > 0 chacun de ces groupes : c'est une limite.

Mais nous avons également

$$f(x) = (x^5 - 10x^4 - 32x^3 - 500x) + (7x^2 - 120),$$

chacun des groupes formés renfermant encore une seule variation. 13 rend le second groupe > 0. Le premier s'écrit

$$x^3\left[(x-10)x-32-\frac{500}{x^2}\right]:$$

pour $x=13$ il devient $13^3\left(7-\frac{500}{169}\right)>0$ et *a fortiori* il est >0 pour les valeurs de x plus grandes que 13. On retrouve donc 13 comme limite ;

4° Enfin appliquons la méthode de Laguerre, et, à cet effet, considérons les fonctions

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 1,\\
f_2(x) &= x-10 = xf_1-10,\\
f_3(x) &= x^2-10x-32 = xf_2-32,\\
f_4(x) &= x_3-10x^2-32x^2+7 = xf_3+7,\\
f_5(x) &= x_4-10x_3-32x_2+7x-500 = xf_4-500,\\
f(x) &= xf_5-120;
\end{aligned}$$

le nombre 13 est le plus petit qui rende $f_3(x)>0$, d'ailleurs $f_3(14)=7$. Substitué dans f_4, il donne $7\times 13+7=98$; dans f_5, $98\times 13-500=774$; enfin dans f, $774\times 13-120>0$. Ainsi 13 est une limite.

Ainsi que le dit M. Laurent dans son *Algèbre*, « il est clair que cette « méthode est d'une application plus facile que celle de Newton, chacun « des polynomes f se déduisant du précédent en le multipliant par x « et lui ajoutant une constante. »

Seulement d'ordinaire elle fournira un nombre supérieur à celui que donnerait cette dernière méthode.

La méthode de Laguerre est exposée dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, février et mars 1880.

Question IV. — *Trouver, s'il en existe, les racines commensurables de l'équation*

$$x^5-2x^4-10x^3+30x^2+63x-120=0.$$

Posons

$$x=y+1,$$

l'équation devient

$$y^5+3y^4-8y^3-2y^2+90y-38=0.$$

Les facteurs du dernier terme sont

$$1,\ 2,\ 19,\ 38,$$

qui augmentés de 1 deviennent

$$2,\ 3,\ 20,\ 39.$$

Il n'y a que 2, 3 et 20 qui divisent 120.

Posons

$$x = z - 1,$$

ce qui donne

$$z^5 - 7z^4 - \cdots - 146 = 0.$$

Les facteurs de 146 sont

$$1,\ 2,\ 73,\ 146,$$

qui diminués de 1 sont

$$0,\ 1,\ 72,\ 145.$$

Il n'y a plus qu'à essayer $+1$ ou -1, qui ne conviennent pas. Ainsi l'équation n'a pas de racines commensurables.

Cette méthode est ici très avantageuse (d'ailleurs il suffit évidemment de former les derniers termes des équations en y et en z). Elle est attribuée à Wassenaar et citée par Schooten, 1722.

(MONTUCLA, t. III.)

Question V. — *Chercher les racines commensurables de l'équation*

$$(1) \qquad 4x^4 - 11x^2 + 7x - 6 = 0.$$

Posons $x = \frac{y}{2}$, l'équation devient

$$(2) \qquad f(y) = y^4 - 11y^2 + 14y - 24 = 0,$$

et nous sommes ramenés à chercher les racines entières de (2).

En l'écrivant $y^2(y^2 - 11) + (14y - 24) = 0$, nous voyons tout de suite que 4 est une limite supérieure des racines positives.

D'ailleurs

$$f(1) = -20, \qquad f(-1) = -48,$$

et si a est une des racines possibles, nous savons que $(a-1)$ devra diviser $f(1)$, $(a+1)$ diviser $f(-1)$.

Essayons 2 :

$$\begin{array}{ll} -24 : 2 = -12, & -12 + 14 = 2, \\ 2 : 2 = 1, & 1 - 11 = -10, \\ -10 : 2 = -5, & -5 + 0 = -5; \end{array}$$

-5 n'est pas divisible par 2, donc 2 n'est pas racine.

Essayons 3 :

$$\begin{array}{ll} -24 : 3 = -8, & -8 + 14 = 6, \\ 6 : 3 = 2, & 2 - 11 = -9, \\ -9 : 3 = -3, & -3 + 0 = -3, \\ -3 : 3 = -1, & -1 + 1 = 0; \end{array}$$

3 est racine.

Occupons-nous des racines négatives :

$$(3) \qquad f(-y) = y^4 - 11y^2 - 14y - 24 = 0\,;$$

d'après le théorème de Descartes, (3) n'aura qu'une racine positive. Cherchons une limite supérieure de cette racine.

Les fonctions de Laguerre sont

$$1, \qquad y, \qquad y^2 - 11, \qquad y^3 - 11y - 14, \qquad f(-y)\,;$$

le nombre 4 rend les trois premières positives, et le résultat de la substitution dans la troisième est 5; dans la quatrième, ce sera $4 \times 5 - 14 = 6$, enfin dans la cinquième, $4 \times 6 - 24 = 0$. Ainsi le nombre 4 est racine de $f(-y) = 0$.

Les racines commensurables de (1) sont donc $\frac{3}{2}$ et -2.

Les deux autres non commensurables sont racines de

$$2x^2 - x + 1 = 0.$$

Question VI. — *Quelques méthodes propres à résoudre les équations des troisième et quatrième degrés.*

Il semble que la première résolution de l'équation

$$x^3 + px - q = 0,$$

quand l'équation a une racine positive et une seule, soit due à Tartalea ou Tartaglia, qui l'exposa en vers italiens. Il la communiqua sous le sceau du secret à Cardan, lequel s'empressa de la publier sous son nom (*Ars Magna, seu de Regulis algebræ*, Nuremberg, 1545).

Cependant Cardan arriva ensuite à résoudre l'équation générale du troisième degré, il remarqua dans le cas irréductible que la méthode de Tartaglia conduisait à une expression imaginaire, alors qu'on arrivait autrement à déterminer des valeurs réelles : il ne put d'ailleurs se prononcer sur cette étrangeté. Cardan remarqua aussi qu'une équation du troisième degré peut avoir des racines *feintes* (ou négatives), mais il ne distingua pas les racines doubles : ainsi pour lui une équation qui a une racine double et une simple a en tout deux racines. La formule dite de Cardan est la suivante, *donnant une seule valeur de x*,

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Ferrari résolut l'équation

$$x^4 = -6x^2 + 60x - 36,$$

à propos d'une question de l'aventurier *Jean Colla*. Celui-ci demandait

de trouver trois nombres « continuellement proportionnels », tels que leur somme fût 10 et le produit des deux premiers 6. En appelant en effet c, x et $\frac{x^2}{c}$ ces trois nombres, le second est déterminé par l'équation ci-dessus.

Bombelli remarque que dans le cas irréductible, la formule de Cardan donne une solution réelle, les parties imaginaires des deux radicaux se détruisant.

Viète considère seulement dans une équation les racines positives. Il trouve, pour une équation du troisième degré dont toutes les racines sont positives, les relations entre les coefficients et les racines. Sa méthode pour résoudre l'équation

$$x^3 + 3bx^2 = 2c^3$$

est la suivante (il l'appelle *Duplicata Hypostasis*) :

Il pose

$$x = \frac{y^2 - b^2}{y},$$

l'équation devient

$$y^6 - 2c^3y^3 = b^6.$$

Mais des trois quantités « *continuellement proportionnelles* » y, b et $\frac{b^2}{y}$, on a les deux premières, et par suite la troisième. Alors

$$x = \sqrt[3]{c^3 + \sqrt{c^6 + b^6}} - \sqrt[3]{-c^3 + \sqrt{c^6 + b^6}}.$$

Si l'équation est de la forme

$$x^3 - 3b^2x = 2c^3,$$

Viète pose de même

$$x = \frac{y^2 + b^2}{y}.$$

Enfin il arrive à construire géométriquement les racines des équations du troisième degré, même dans le cas irréductible, en considérant toujours seulement des racines positives.

Nous indiquons d'autres méthodes aux Questions proposées.

Question VII. — Le « cas irréductible » dans les équations du troisième degré.

La formule de Cardan, appliquée à l'équation

$$x^3 - 15x - 4 = 0,$$

étudiée par Bombelli, donne

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

Bombelli remarque parfaitement que cette expression peut s'écrire

$$x = (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4.$$

L'équation

$$x^3 - 12x - 9 = 0,$$

traitée de la même manière, donne

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{-175}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{-175}{4}}}$$

$$= \left(-\frac{3+\sqrt{-7}}{2}\right) + \left(-\frac{3-\sqrt{-7}}{2}\right) = -3.$$

Bombelli n'exécute pas cette dernière extraction de racines, « mais ce n'est pas faute de sa méthode : il voyait bien que par là il obtenait seulement une valeur négative. La formule de Cardan proprement dite ne pouvait pas fournir dans ce cas la racine positive, mais le même Cardan avait donné une autre méthode pour la trouver en pareille circonstance. Cette méthode, que Bombelli applique, se réduit à ceci. Soit

$$x^3 = 12x + 9;$$

ajoutons aux deux membres de l'équation le cube a^3, il viendra

$$x^3 + a^3 = 12x + 9 + a^3;$$

partant,

$$\frac{x^3+a^3}{x+a} = \frac{12x+9+a^3}{x+a},$$

ou bien

$$x^2 - ax + a^2 = 12\,\frac{x+\dfrac{9+a^3}{12}}{x+a}\text{ ».}$$

« Actuellement, si l'on prend pour a un nombre tel que

$$\frac{9+a^3}{12} = a,$$

on aura x par la solution de l'équation du second degré

$$x^2 - ax + a^2 = 12.$$

Or, avec une légère attention, on voit que $a = 3$ satisfait à la condition $\frac{9+a^3}{12} = a$. Ainsi, on a

$$x^2 - 3x = 3,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21}.$$

On voit par là que Bombelli ne tire pas cette racine de la formule

$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$; mais par un autre procédé enseigné par Cardan, procédé qui revient à trouver les deux autres racines de l'équation du troisième degré, lorsqu'une des racines est connue ; car le rapprochement des deux équations

$$x^3 - 12x - 9 = 0,$$

$$a^3 - 12a - 9 = 0$$

indique que $a = -3$ est racine de l'équation en x. On peut dire en général que si a est une racine de l'équation

$$x^3 - px - q = 0,$$

on a

$$q = a^3 - pa ;$$

et par conséquent

$$x^3 - a^3 - p(x - a) = 0,$$

ou bien

$$x^2 + ax + a^2 - p = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{p - \frac{3a^2}{4}} ;$$

les trois racines de l'équation $x^3 - px - q = 0$ sont donc fournies en général par les trois formules

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}, \\ x'' &= -\frac{x'}{2} + \sqrt{p - \frac{3x'^2}{4}}, \\ x''' &= -\frac{x'}{2} - \sqrt{p - \frac{3x'^2}{4}}, \end{aligned} \right.$$

qui sont une conséquence de la méthode de Cardan, écrite algébriquement. Il suffit donc que x' soit un nombre rationnel pour qu'on ait les valeurs de x'', x''', exprimées par un nombre et une racine carrée ».

(LIBRI, *Histoire des Sciences mathématiques en Italie,* 1838-1841, tome III, note XXXV.)

Question VIII. — NOTE SUR LE THÉORÈME DIT « DE ROLLE ».

Énoncé du théorème et explication sommaire de la méthode suivie par l'auteur, d'après son *Traité d'Algèbre* (1690) (pages 113-152).

CHAPITRE VI

1. « *Méthode pour résoudre les égalitez où il n'y a qu'une seule inconnüe.* »

« L'on suppose icy que l'égalité proposée n'a qu'une seule inconnüe, et qu'elle ait receu la première, la seconde et la quatrième préparation dont on a parlé dans le Chapitre précédent.

« On suppose aussi que dans chaque égalité il y a autant de racines que de dimensions, et s'il y en a moins, celles qui manquent s'appelleront *Racines défaillantes*.

« L'on donnera icy une méthode pour trouver les racines effectives, et pour sçavoir combien il y a de racines défaillantes, et ensuite l'on donnera plusieurs moyens pour l'abréger sans rien diminuer de son étendüe.

« Cette méthode consiste principalement dans la manière de trouver les hypothèses qui conviennent à chaque racine de l'équation proposée.

« L'on prendra parmi les termes négatifs de l'égalité celui qui a le plus grand nombre connu, et ayant changé le signe de ce nombre, on le divisera par le nombre connu du premier terme. On augmentera le quotient d'un nombre entier et positif tel que l'on voudra, et la somme s'appellera *Grande hypothèse*. Mais en cela on suppose, comme il a été dit, que l'égalité ait receu la seconde préparation, sinon on formera la grande hypothèse comme le nombre duquel on doit soustraire une inconnüe quand on fait la quatrième préparation du chapitre précédent.

« Le 0 s'appellera *Petite hypothèse* : la petite et la grande hypothèse s'appelleront *Hypothèses extrêmes* ; et toutes les autres s'appelleront *Hypothèses moyennes*.

« La plus petite hypothèse s'appellera *Première hypothèse*. Celle qui surpasse la plus petite et qui est surpassée par chacune des autres s'appellera *Seconde hypothèse* : celle qui est plus grande que chacune des deux premières, et qui est moindre que chacune des autres, sera nommée *Troisième hypothèse*, et ainsi de suite. »

. . . . . .

2. L'intelligence de ce qui précède et de la règle qui va suivre exige que nous donnions quelques explications.

Les différentes préparations indiquées au chapitre V sont :

Première préparation. — On a rendu l'équation entière.

Deuxième préparation. — On a rendu égal à 1 le coefficient du terme du plus haut degré.

Quatrième préparation. — On s'est arrangé de manière que les coefficients soient alternativement positifs et négatifs, en posant

$$x = \frac{N}{A_0} + \alpha - y,$$

A_0 étant le premier coefficient, supposé positif, $-N$ le plus grand en valeur absolue des coefficients négatifs, α un nombre au moins égal à 1 et y une nouvelle inconnue. Dans la pratique on aura pris pour $\frac{N}{A_0} + \alpha$ le plus petit entier supérieur à $\frac{N}{A_0} + 1$, et si la seconde préparation a déjà été faite, on aura posé

$$x = N + 1 - y.$$

Alors « Lorsque l'égalité a receu cette quatrième préparation, chaque racine effective (c'est-à-dire positive) de l'égalité peut avoir deux hypothèses positives. »

La *troisième préparation* consisterait à poser $x = -y$: elle remplacerait la quatrième, dit Rolle, si l'équation proposée était complète et avait tous ses coefficients positifs.

D'autre part, pour avoir les cascades, Rolle écrit l'équation proposée $f(x) = 0$, puis les équations $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, ... , jusqu'à celle du premier degré inclusivement.

Dans le chapitre III, Rolle dit ceci :

« Si l'on substitüe deux nombres au lieu de l'inconnüe, chacun séparément, « et si l'un de ces nombres donne un résultat positif, et l'autre un résultat « négatif, il y a toujours une racine qui surpasse le plus petit des nombres et « qui est surpassée par le plus grand. Ces deux nombres s'appelleront *Hypo-* « *thèses* et il est clair que par le moyen des hypothèses on peut trouver la « racine qu'elles renferment. Par exemple, si l'on a les deux nombres 5 et 8, « et si l'on substitüe l'un et l'autre dans l'égalité

$$z^2 - 10z + 21 = 0,$$

« le premier donne -4, le second donne $+5$. D'où l'on peut conclure qu'il « y a une valeur de z entre les deux nombres 5 et 8, et ces deux nombres sont « les hypothèses de cette valeur. »

3. « *Règle.* — Lorsqu'il y a des racines effectives dans une cascade, les « hypothèses de cette cascade donnent alternativement l'une $+$ et l'autre $-$. »

« Si la multitude des racines effectives est exprimée par un nombre pair, la « première hypothèse moyenne donne $-$, la seconde donne $+$, la troisième « donne $-$, la quatrième donne $+$, et ainsi de suite jusques à la dernière « hypothèse qui donne $-$. »

« Mais si la multitude des racines effectives est exprimée par un nombre « impair, la première hypothèse moyenne donne $+$, la seconde donne $-$, la « troisième donne $+$, la quatrième donne $-$, et ainsi de suite jusques à la « dernière hypothèse moyenne qui doit donner $-$. »

« Si l'on suppose que ces signes sont distribuez par couples, comme on le « voit icy :

Pour les degrez pairs	$- +$	$- +$	$- \cdots\cdots$,
Pour les degrez impairs	$+ -$	$+ -$	$+ \cdots\cdots$

« L'on remarquera que si les deux hypothèses qui doivent produire un de ces « couples, sont telles que l'une ou l'autre ne donne pas le $+$ ou le $-$ qu'elle « devroit donner, suivant ce que l'on vient de dire, alors il y a des racines « défaillantes dans la cascade où cela arrive, et ces racines sont de deux « sortes. »

« *Racines défaillantes de la première espèce.* — S'il arrive que les hypo- « thèses donnent 0 au lieu de donner $+$ ou $-$, alors chacune de ces hy- « pothèses sera une des racines de la cascade où se fait la substitution, et il « faudra compter dans cette cascade une racine défaillante de la première « espèce, pour chacune de ces hypothèses qui produiront cet effet. Ainsi il est « inutile de comparer de nouveau cette hypothèse avec celle qui la suit ; et il « est clair aussi qu'il y aura moins d'hypothèses pour la cascade suivante. »

(Rolle traite ici les exemples

$$x^4 - 48x^3 + 864x^2 - 6912x + 20736 = 0,$$
$$x^3 - 15x^2 + 72x - 108 = 0).$$

« *Racines défaillantes de la seconde espèce.* — Si la substitution des hypo- « thèses ne donne ny le 0 ny le $+$ ou le $-$ que l'on demande, ... alors on

« comptera deux racines défaillantes dans la cascade où l'on a substitué ces « hypothèses et encore autant dans chacune des cascades suivantes pour « chaque couple de signes où cela arrivera : c'est-à-dire que s'il y a trois cou- « ples de signes, l'on comptera six racines défaillantes dans chacune des « cascades suivantes. Mais pour la pratique il suffit de penser à la seule « cascade immédiate où l'on a substitué les hypothèses. »

(Comme exemples, Rolle donne les équations

$$x^2 - 6x + 17 = 0,$$

$$x^3 - 9x^2 + 28x - 30 = 0,$$

$$x^3 - 27x^2 + 240x - 504 = 0,$$

$$x^3 - 36x^2 + 240x - 1800 = 0).$$

Il nous est impossible d'étudier les différents cas examinés par Rolle : le célèbre auteur essaie non seulement de déterminer le nombre des racines réelles d'une équation, mais encore de calculer les valeurs exactes de ces racines, si elles sont entières, leurs valeurs approchées si elles sont incommensurables. Indiquons encore cependant le passage suivant (p. 139) :

« Il y a des égalitez dont on poursuivroit les hypothèses à l'infini par les « règles précédentes sans trouver ni le + ni le — que l'on cherche. Alors l'hy- « pothèse est égale à la racine, et la racine est irrationnelle : c'est pourquoy il « faut prendre l'hypothèse approchée pour la racine véritable de toutes les cas- « cades suivantes, et compter une racine défaillante de la première espèce[1]. »

(*Revue de Mathématiques Spéciales*, mars 1894.)

Question IX. — Théorème de Descartes.

« On sait qu'une équation d'un degré quelconque, a autant de racines soit réelles soit imaginaires, qu'il y a d'unités dans le plus grand exposant de l'inconnue. Descartes a donné une règle pour trouver le nombre des racines positives et celui des racines négatives, lorsqu'elles sont toutes réelles. La règle que ce célèbre géomètre avait donnée sans démonstration, a été démontrée depuis par l'abbé de Gua, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1741, et ensuite par Segner, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1756. Comme tout le monde n'est pas à portée de consulter ces précieuses Collections, je vais faire connoître en peu de mots la démonstration de Segner : je la donne de préférence à celle de l'abbé de Gua, parce qu'elle est plus simple et plus directe.

« Si une équation toute ordonnée ne manque d'aucun terme, ou, en cas

(1) Extrait d'une lettre de M. Maurice Cantor (*Heidelberg*) (13 mars 1894).

« Combien Rolle est au-dessus de ses contemporains ; mais aussi comme il écrivait mal et d'une façon peu intelligible ! C'est ce dernier défaut ainsi que sa malheureuse dispute avec Leibniz qui, à mon avis, ont fait tort à son *Algèbre*. »

qu'elle en manque, si l'on conçoit écrit en sa place ± 0, il est évident qu'il y aura autant de racines dans l'équation qu'on pourra former de combinaisons de deux signes, en joignant chacun d'eux à celui qui le suit immédiatement. Ainsi dans l'équation

$$x^5 + ax^4 - bx^3 - cx^2 + dx + e = 0,$$

il y a cinq racines et autant de combinaisons distinctes de deux signes pris consécutivement ; savoir $++$, $+-$, $--$, $-+$, $++$, en effet cette équation a six termes ; et en général une équation de degré m a $m+1$ termes, ce qui donne m combinaisons de deux signes, en les prenant consécutivement, comme nous venons de le faire. Mais dans quelqu'ordre que se trouvent les signes d'une équation, si on la multiplie par un facteur simple, qui contienne une racine négative, par $x+p$ par exemple,

$$\begin{array}{l} x^m + ax^{m-1} - bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} \ldots\ldots \mp k \\ x + p \\ \hline + x^{m+1} + ax^m - bx^{m-1} - cx^{m-2} + dx^{m-3} \ldots\ldots \mp kx \qquad \text{(A)} \\ \qquad + px^m + apx^{m-1} - bpx^{m-2} - cpx^{m-3} + dpx^{m-4} \ldots\ldots \mp kp, \quad \text{(B)} \end{array}$$

il est visible, par la nature même de la multiplication, que les deux suites (A) et (B) ont les mêmes signes, et que les termes de la seconde doivent être plus avancés d'un rang vers la droite, de sorte que le signe d'un terme quelconque de la suite (B) est le même que celui du terme, qui précède d'un rang dans la série (A) ; mais si on multiplie la même équation ou toute autre par un facteur, qui contienne une racine positive, tel que $x-q$,

$$\begin{array}{l} x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} - dx^{m-4} \ldots\ldots \mp k \\ x - q \\ \hline + x^{m+1} + ax^m + bx^{m-1} - cx^{m-2} - dx^{m-3} \ldots\ldots \mp kx \qquad \text{(A)} \\ \qquad - qx^m - aqx^{m-1} - bqx^{m-2} + cqx^{m-3} + dqx^{m-4} \ldots\ldots \mp kq, \quad \text{(B)} \end{array}$$

les signes de la série (B) seront différents des signes de la série (A), en sorte que si on prend un signe quelconque de la série (B), il différera du signe plus avancé d'un rang dans la série (A). Il est facile de voir que les signes du produit dépendent de ceux des deux séries (A) et (B) et du rapport qu'il y a entre les grandeurs des termes correspondants, qui sont affectés de signes contraires. D'abord il est clair que le premier terme du produit aura le même signe que le premier terme de la série (A), et que cette même série (A) continuera de fournir les signes du produit jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un terme au-dessous duquel s'en trouve un, qui ayant un signe contraire soit plus grand dans la série (B) ; après quoi, laissant la série (A), on doit prendre la suite des signes de la série (B), jusqu'à ce qu'on revienne de nouveau à un terme au-dessus duquel s'en trouve un plus grand avec le signe contraire dans la série (A). On écrira ensuite le signe de ce terme supérieur, au lieu de celui de l'inférieur, et les signes suivants de la même série, jusqu'à ce qu'on soit obligé de repasser à la série inférieure, et ainsi de suite alternativement ; de manière pourtant qu'on s'arrête à la fin à la série (B), dont le dernier terme n'en ayant aucun derrière lui, dans la série (A), donnera nécessairement un signe semblable à celui, dont il est affecté, pour le dernier terme du produit. Il suit de là que pour avoir les signes du produit, on doit passer au moins une fois de la série (A) à la série (B), et quel que soit le

nombre de ces passages successifs de l'une à l'autre, le nombre des retours de (B) à (A) sera toujours moindre d'une unité que le nombre de passages de (A) à (B).

« Si on fait attention à présent que lorsque le multiplicateur renferme une racine négative, on a, à chaque fois qu'on passe de la série (A) à la série (B), une permanence de plus dans le produit, puisqu'on passe nécessairement une fois de plus de la série (A) à la série (B), qu'on ne revient de la série (B) à la série (A), nous devons en conclure, sans nous embarrasser de ce qui arrive à chaque retour de (B) à (A), que le nombre des permanences est augmenté au moins d'une unité. De même, dans le second cas, c'est-à-dire, lorsque le multiplicateur renferme une racine positive ; puisque chaque passage de la série (A) à la série (B) surpasse d'une unité le nombre des retours de la série (B) à la série (A), nous sommes également en droit d'en conclure qu'il y aura dans le produit au moins une variation de plus que dans le multiplicande.

« Ainsi, comme une équation d'un degré quelconque, peut être regardée comme le résultat de la multiplication d'autant de facteurs binomes simples, qu'il y a d'unités dans le plus grand exposant de l'inconnue, et que pour la multiplication quelconque d'une équation, au moyen de laquelle une nouvelle racine réelle négative y est introduite, une permanence tout au moins des signes semblables $+ +$ ou $- -$ est ajoutée au nombre de celles qui se trouvent dans l'équation multipliée, le nombre de ces permanences dans une équation quelconque ne sera pas moindre que le nombre de ses racines négatives. C'est pourquoi si dans une équation tous les termes sont précédés du signe $+$ ou du signe $-$, aucune racine réelle de l'équation ne sera positive ; car s'il y en avait seulement une, il se trouverait au moins une variation de signes. De même aussi, si dans une équation tous les termes ont successivement des signes dissemblables, elle n'aura point de racine réelle négative, puisque si elle en avoit une seule, on y verroit au moins une permanence de signes. Concluons donc qu'en général dans toute équation dont toutes les racines sont réelles, le nombre de variations de signes $+ -$ et $- +$ est égal au nombre de ses racines positives, et le nombre des permanences $+ +$ et $- -$ égal au nombre des racines négatives de la même équation. En effet, soient n le nombre des racines négatives et N le nombre des permanences $+ +$ et $- -$ de cette équation ; soient m le nombre de ses racines positives et M le nombre des variations $+ -$ et $- +$; on aura

$$n + m = \mathrm{N} + \mathrm{M};$$

or N ne peut pas être moindre que n ; si donc on suppose $\mathrm{N} > n$, on aura $\mathrm{M} < m$; ce qui ne peut avoir lieu, comme nous venons de le voir. Donc

$$\mathrm{N} = n \qquad \text{et} \qquad m = \mathrm{M}.$$

Donc s'il arrive que le nombre des racines réelles négatives de l'équation ne soit pas égal au nombre N, et que pareillement le nombre des racines réelles positives de la même équation ne soit pas égal au nombre M, c'est une preuve qu'elle renferme des racines imaginaires.

« En réunissant tout ce qui vient d'être exposé, il en résulte manifestement la démonstration de la règle de Descartes, savoir, que

« dans toute équation qui n'a point de racines imaginaires, le nombre des

racines positives est égal au nombre de variations de signes, et le nombre des racines négatives égal au nombre de permanences ».

[EULER, *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, trad. Labey, tome I, p. 305, note (*b*).]

Question X. — ÉTUDE DE LA FONCTION $y = \frac{f'(x)}{f(x)}$. — DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE ROLLE.

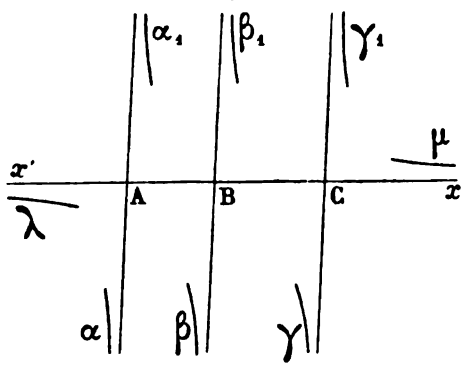
Considérons la fraction suivante, où f est un polynome entier

$$y = \frac{f'(x)}{f(x)};$$

nous la supposons simplifiée, ce qui revient à dire que l'équation $f(x) = 0$ n'admet que des racines simples.

Nous supposons également démontré que la dérivée logarithmique $\frac{f'(x)}{f(x)}$ passe du négatif au positif lorsqu'elle devient infinie.

Cela posé, il est clair que si x est négatif et très grand, y est négatif et très petit, ce qui donne déjà la disposition de la courbe par rapport à Ox.



Marquons les points A, B, C, qui ont pour abscisses les racines réelles de $f(x) = 0$: le théorème de la dérivée logarithmique indique la disposition de la courbe par rapport aux parallèles à Oy menées par ces points. (Nous supposons pour préciser que $f = 0$ ait trois racines réelles.)

On voit sur la figure que les branches $\alpha_1\beta$, $\beta_1\gamma$, rencontrent $x'x$ en un nombre impair de points, tandis que $\lambda\alpha$ et $\gamma_1\mu$ coupent cette droite en un nombre pair de points, qui peut être zéro.

Donc :

1° *Deux racines consécutives de* $f = 0$ *comprennent un nombre impair de racines de* $f' = 0$.

2° *Entre* $-\infty$ *et la plus petite racine de* $f = 0$, *ou entre la plus grande racine de* $f = 0$ *et* $+\infty$, *il existe un nombre pair (qui peut être zéro) de racines de* $f' = 0$.

3° *Deux racines consécutives de* $f' = 0$ *comprennent au plus une racine de* $f = 0$.

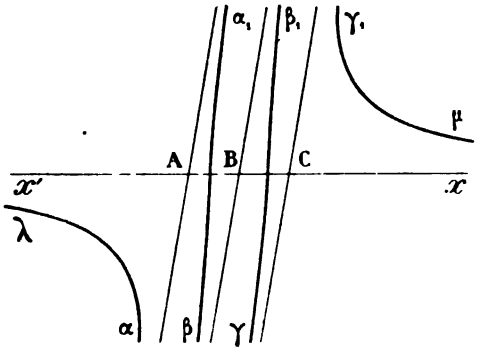
4° $f = 0$ *a au plus une racine réelle plus grande que la plus grande racine de* $f' = 0$, *et au plus une racine réelle plus petite que la plus petite des racines réelles de* $f' = 0$.

5° $f' = 0$ *a un nombre pair (qui peut être zéro) de racines supérieures à la plus grande racine de* $f = 0$, *et un nombre pair (qui peut être zéro) de racines inférieures à la plus petite racine de* $f = 0$.

En particulier, si $f = 0$ a toutes ses racines réelles (trois ici),

1° $f' = 0$ *a aussi toutes ses racines réelles* (deux ici) *et ces racines séparent les premières.*

2° *De plus il n'y a dans ce cas ni maximum ni minimum.* En effet, si en un point M la tangente était horizontale, cette tangente couperait la courbe, au moins, aux deux points M, puis en un point de chaque branche (dont l'un est à l'infini), ce qui ferait un nombre supérieur d'une unité à m, degré de la courbe.



Ainsi la fonction y est continuellement décroissante ; donc sa dérivée $\frac{ff'' - f'^2}{f^2}$ est toujours négative, et l'équation

$$ff'' - f'^2 = 0$$

a toutes ses racines imaginaires, ce que nous avons eu occasion de démontrer autrement.

Il est facile d'obtenir d'autres énoncés de théorèmes en considérant, ou le nombre de points d'inflexion de la courbe précédente, ou le nombre des points où elle est rencontrée par une droite, etc. Ces propositions se vérifient et se généralisent d'ailleurs par le calcul, en remarquant que de

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

on tire

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_n}.$$

Question XI. — ÉNONCÉS DES THÉORÈMES DE BUDAN ET DE FOURIER.

Théorème de Budan. — Si, dans une équation en x que nous représenterons par $f(x) = 0$, on fait alternativement

$$x = p + x', \qquad x = q + x'',$$

p et q étant deux nombres réels de signes quelconques, et tels que l'on ait $p < q$,

1° La transformée en $x' = x - p$ ne peut avoir moins de variations que la transformée en $x'' = x - q$;

2° Le nombre des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$, comprises entre p et q, ne peut jamais surpasser celui des variations perdues dans le passage de la transformée en $(x - p)$ à la transformée en $(x - q)$;

3° Quand il en est surpassé, il l'est toujours d'un nombre pair.

(Dans le cas particulier où l'un des nombres p, q serait nul, la transformée correspondante devrait être remplacée par la proposée elle-même.)

Théorème de Fourier. — Si dans la suite des $(m + 1)$ fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(m)}(x)$, on substitue alternativement deux nombres réels quelconques p, q $(p < q)$, et que l'on représente par P, Q les deux suites de nombres résultant respectivement de ces substitutions :

1° La suite P ne peut présenter moins de variations que la suite Q ;

2° Le nombre des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$, comprises entre p et q, ne peut jamais surpasser celui des variations perdues dans le passage de l'hypothèse $x = p$ à l'hypothèse $x = q$;

3° Quand il en est surpassé, il l'est toujours d'un nombre pair.

(*Mémoires de la Société royale des sciences de Lille*, 1834.)

QUESTIONS PROPOSÉES

Trouver le nombre des racines réelles des équations

1. $4x^5 - 3x^2 + 2 = 0$.
2. $5x^4 - 4x^3 + 7 = 0$.
3. $3x^3 - 3x + 11 = 0$.
4. $27x^4 - 39x^2 - 73 = 0$.
5. $4x^3 - 3x^2 + 7 = 0$.
6. $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 21 = 0$.
7. $x^6 + x^5 - 2x^3 + 3 = 0$.
8. $6x^4 - x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$.
9. $4x^4 + 5(x^3 + x^2 + x + 1) = 0$.
10. $(2x + 1)^2 + x^2 - 2x - 2 = 0$.

11. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0.$

12 $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-3}-\operatorname{tg} x=0.$

13. $\log x-x^2=0.$

14. $\operatorname{tg} x-\sin x-x=0.$

15. $\sin x+3\cos x-4x=0.$

16. $x\operatorname{arc\,tg} x+x+\operatorname{arc\,tg} x-1=0.$

17. $3\sin x=\cos 2x+2\sin^2 3x.$
Exprimer tout en fonction de $\sin x$.

18. $e^x-x^2+4x-3=0.$

19. $x-\sqrt{2}\sin x=0.$

20. $e^x\pm e^{-x}-1=0.$

21. $10^x-100x=0.$ (Trouver aussi en combien de points une parallèle à l'axe des x coupe la courbe $y=10^x-100x$.)

22. $x^2-\operatorname{tg} x=0.$

23. $\begin{vmatrix} 1-x & 2-x & 3-x \\ 2-x & 3-x & 4-x \\ 3-x & 4-x & 5-2x \end{vmatrix}=0.$

Trouver le nombre des racines réelles des équations suivantes, suivant les valeurs attribuées aux paramètres qui y entrent :

24. $$2x^5-4x^3+\lambda=0.$$

25. $$4x^5-5x^4+\lambda=0.$$

26. $$x^7+6m^4x^3+7p^5x^2-2m^7=0.$$

27. $$x^5+\lambda x^4+\mu(x^3+x^2)+\lambda x+1=0.$$

28. $$x^4+px+q=0.$$

29. $$x^5+px+q=0.$$

30. $$(x-a)(x-b)^2(x-c)^3+A^2=0. \quad (a<b<c).$$

31 $$x^5+ax^3+b=0.$$

32. $$(x^2+px+q)^3+ax+b=0.$$

Chercher les points de rencontre de la parabole $x^2+px+q=0$ et de la droite $ax+b=0$.

33. $$x^5+ax^4+bx+c=0.$$

34. $$ax^7+bx^5+cx^3+dx+e=0.$$

35. $$(1+\lambda+\lambda^2)x^4-5x^3+9x^2-\lambda=0.$$

36. $$x^5-5x^4+5x^3+\lambda=0.$$

37. $$x^4+4ax^3-6x^2+1=0.$$

38. $$4x^9+9ax^4+1=0.$$

39. $$x^5-5ax^4-10x^3+b=0.$$

40. $$\frac{x^4}{4}-\frac{2x^2}{2}+2x+\lambda=0.$$

41. $$5x^9 - 9x^5 + a = 0.$$

42. $$x^4 + 12x^3 + 36x^2 - 105 + \lambda(x+3) = 0.$$

43. $$3x^4 - 16x^3 + 6\lambda x^2 + \mu = 0.$$

44. $$x - \frac{2}{x} - 3\mathrm{L}x = \lambda.$$

45. $$x^6 + ax^2 + bx + c.$$

46. $$x^m + ax^2 + bx + c.$$

47. $$e^x - mx - p = 0.$$

Construire la courbe $y = e^x$ et la droite $y = mx + p$.

48. $$(x-1)(x^n+1) - 2x(x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + 1).$$

49. $$x\lambda^3 - 3\lambda^2 + x^5 = 0.$$

Séparer les racines des équations suivantes :

50. $$6x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x - 2 = 0.$$

51. $$9x^3 - 24x^2 + 16x - 1 = 0.$$

52. $$x^4 - 5x^3 + 9x^2 - \lambda = 0.$$

53. $$1000\,x - \sin x = 100.$$

54. $$\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x + m = 0.$$

55. $$10^x - x^2 = 0.$$

56. Séparer à $\frac{1}{100}$ près les racines de l'équation $z^2 - 7z + 11 = 0$.

(Rolle.)

Appliquer aux équations suivantes le théorème de Rolle. (Rolle les indique dans son *Algèbre* et traite en détail la première d'entre elles.)

57. $$u^4 - 24u^3 + 198u^2 - 648u + 473 = 0.$$

58. $$y^3 - 57y^2 + 936y - 3.780 = 0.$$

59. $$z^4 - 48z^3 + 864z^2 - 6.912z + 20.736 = 0.$$

60. $$z^3 - 15z^2 + 72z - 108 = 0.$$

61. $$z^2 - 6z + 17 = 0.$$

62. $$z^3 - 9z^2 + 28z - 30 = 0.$$

63. $$z^3 - 27z^2 + 240z - 504 = 0.$$

64. $$u^4 - 12u^3 + 43u^2 - 42u - 12 = 0.$$

11. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0.$

12 $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-3}-\operatorname{tg} x=0.$

13. $\log x - x^2 = 0.$

14. $\operatorname{tg} x - \sin x - x = 0.$

15. $\sin x + 3\cos x - 4x = 0.$

16. $x \operatorname{arc\,tg} x + x + \operatorname{arc\,tg} x - 1 = 0.$

17. $3\sin x = \cos 2x + 2\sin^2 3x.$
Exprimer tout en fonction de $\sin x$.

18. $e^x - x^2 + 4x - 3 = 0.$

19. $x - \sqrt{2}\sin x = 0.$

20. $e^x \pm e^{-x} - 1 = 0.$

21. $10^x - 100x = 0.$ (Trouver aussi en combien de points une parallèle à l'axe des x coupe la courbe $y = 10^x - 100x$.)

22. $x^2 - \operatorname{tg} x = 0.$

23. $\begin{vmatrix} 1-x & 2-x & 3-x \\ 2-x & 3-x & 4-x \\ 3-x & 4-x & 5-2x \end{vmatrix} = 0.$

Trouver le nombre des racines réelles des équations suivantes, suivant les valeurs attribuées aux paramètres qui y entrent :

24. $$2x^5 - 4x^3 + \lambda = 0.$$

25. $$4x^5 - 5x^4 + \lambda = 0.$$

26. $$x^7 + 6m^4x^3 + 7p^5x^2 - 2m^7 = 0.$$

27. $$x^5 + \lambda x^4 + \mu(x^3 + x^2) + \lambda x + 1 = 0.$$

28. $$x^4 + px + q = 0.$$

29. $$x^5 + px + q = 0.$$

30. $$(x-a)(x-b)^2(x-c)^3 + A^2 = 0. \quad (a < b < c).$$

31 $$x^5 + ax^3 + b = 0.$$

32. $$(x^2 + px + q)^3 + ax + b = 0.$$

Chercher les points de rencontre de la parabole $x^2 + px + q = 0$ et de la droite $ax + b = 0$.

33. $$x^5 + ax^4 + bx + c = 0.$$

34. $$ax^7 + bx^5 + cx^2 + dx + e = 0.$$

35. $$(1 + \lambda + \lambda^2)x^4 - 5x^3 + 9x^2 - \lambda = 0.$$

36. $$x^5 - 5x^4 + 5x^3 + \lambda = 0.$$

37. $$x^4 + 4ax^3 - 6x^2 + 1 = 0.$$

38. $$4x^9 + 9ax^4 + 1 = 0.$$

39. $$x^5 - 5ax^4 - 10x^3 + b = 0.$$

40. $$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} + 2x + \lambda = 0.$$

41. $$5x^9 - 9x^5 + a = 0.$$

42. $$x^4 + 12x^3 + 36x^2 - 105 + \lambda(x+3) = 0.$$

43. $$3x^4 - 16x^3 + 6\lambda x^2 + \mu = 0.$$

44. $$x - \frac{2}{x} - 3\mathrm{L}x = \lambda.$$

45. $$x^6 + ax^2 + bx + c.$$

46. $$x^m + ax^2 + bx + c.$$

47. $$e^x - mx - p = 0.$$

Construire la courbe $y = e^x$ et la droite $y = mx + p$.

48. $$(x-1)(x^n+1) - 2x(x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + 1).$$

49. $$x\lambda^3 - 3\lambda^2 + x^5 = 0.$$

Séparer les racines des équations suivantes :

50. $$6x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x - 2 = 0.$$

51. $$9x^3 - 24x^2 + 16x - 1 = 0.$$

52. $$x^4 - 5x^3 + 9x^2 - \lambda = 0.$$

53. $$1000\,x - \sin x = 100.$$

54. $$\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x + m = 0.$$

55. $$10^x - x^2 = 0.$$

56. Séparer à $\frac{1}{100}$ près les racines de l'équation $z^3 - 7z + 11 = 0$.

(Rolle.)

Appliquer aux équations suivantes le théorème de Rolle. (Rolle les indique dans son *Algèbre* et traite en détail la première d'entre elles.)

57. $$u^4 - 24u^3 + 198u^2 - 648u + 473 = 0.$$

58. $$y^3 - 57y^2 + 936y - 3.780 = 0.$$

59. $$z^4 - 48z^3 + 864z^2 - 6.912z + 20.736 = 0.$$

60. $$z^3 - 15z^2 + 72z - 108 = 0.$$

61. $$z^2 - 6z + 17 = 0.$$

62. $$z^3 - 9z^2 + 28z - 30 = 0.$$

63. $$z^3 - 27z^2 + 240z - 504 = 0.$$

64. $$u^4 - 12u^3 + 43u^2 - 42u - 12 = 0.$$

65. $$e^3 - 27e^2 + 237e - 504 = 0.$$

66. $$u^3 - 5u^2 + 5u - 4 = 0.$$

67. $$z^4 - 8z^3 + 18z^2 - 8z + 1 = 0.$$

68. $$z^9 - 14z^8 + 81z^7 - 253z^6 + 470z^5 - 541z^4 + 388z^3 - 168z^2 + 40z - 4 = 0.$$

69. $$z^4 - 13z^3 + 33z^2 - 23z + 2 = 0.$$

70. $$z^3 - 34z^2 + 320z - 800 = 0.$$

71. $$z^3 + 9z^2 - 9z + 10 = 0.$$

72. $$z^3 - 9z^2 + 25z - 22 = 0.$$

Appliquer le théorème de Rolle aux équations

73. $$\mathrm{L}x + x^2 = 0.$$

74. $$2x\mathrm{L}x + 3^2x + 1 = 0.$$

Diviser tout par x pour avoir une dérivée algébrique.

75. $$\begin{cases} x^4 + px^2 + q = 0, \\ x^3 + px + \dfrac{q}{x} = 0. \end{cases}$$

76. $$\begin{cases} x^4 - 6x^2 + 49x + 24 = 0, \\ x^3 - 6x + 49 + \dfrac{24}{x} = 0. \end{cases}$$

77. $$e^x = 2x + \lambda.$$

78. Nombre de racines réelles d'une équation dont la dérivée est
$$(x-1)^2(x+1)(x+3)^5(x+5)^4.$$

79 Si une équation $f(x) = 0$ a au moins $(m-1)$ racines réelles, l'équation $f(x) - f'(x) = 0$ a au moins $(m-1)$ racines réelles.

(Terquem.)

80. Appliquer le théorème de Descartes à l'équation
$$x^4 + 111x^3 + 6v^2 + 1.993x + 35.878 = 0,$$
puis à cette équation multiplée par $x - 18$.
(Objection de Wallis à Descartes sur son théorème.)

81. Si dans une équation quatre termes consécutifs ont leurs coefficients en progression géométrique, et si de plus les antécédents ont le même signe, l'équation à des racines imaginaires.

(Serret.)

82 Si une équation a toutes ses racines réelles, soient
$$A_p x^{m-p} + A_{p+1} x^{m+p-1} + A_{p+2} x^{m+p-2}$$

trois termes consécutifs. On a

$$(A_{p+1})^2 \frac{\dfrac{m-p+1}{p+2}}{\dfrac{m-p}{p+1}} > A_p A_{p+2}$$

(MARIE, *Histoire des Mathématiques*, tome V, p. 200.)

Appliquer le théorème de Sturm aux équations

83. $$x^6 - 6x^5 + a = 0.$$

84. $$x^6 - 6x^5 + 10x + a = 0.$$

85. $$x^4 - 6x^2 + 4x + 3a = 0.$$

86. $$x^5 - 5ax^4 - 10x^3 + 10ax^2 + 5x - a = 0.$$

87. $$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = 0.$$

88. Démontrer que l'équation

$$P_m = (x+i)^m + (x-i)^m = 0$$

a toutes ses racines réelles.

On commencera par établir la relation

$$2xP_{m-1} = P_m + (x^2+1)P_{m-2}.$$

89. On pose $V_n = (x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n$. Démontrer que V_n est un polynome entier de degré n et que $V_n = 0$ a toutes ses racines réelles.

On démontrera la relation $2xV_n = V_{n+1} + V_{n-1}$, et on vérifiera que la suite V_n, $V_{n-1}, \ldots, V_0$, jouit des propriétés des fonctions de Sturm.

90. Si l'on pose $\operatorname{tg} \alpha = a$ et $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{m} = x$, il existe entre a et x la relation

$$iU_m = (1+ix)^m(1-ia) - (1-ix)^m(1+ia) = 0.$$

Démontrer que l'équation $U_m = 0$ a toutes ses racines réelles.

91. « Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique ayant toutes ses racines réelles : en désignant par ω, p et q des quantités réelles quelconques, si l'on pose pour abréger,

$$f(x + \omega i) = F(x) + i\Phi(x),$$

l'équation

$$pF(x) + q\Phi(x) = 0$$

a également toutes ses racines réelles. »

92. « L'équation $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^m = A + Bi$, dans laquelle A et B représentent deux quantités réelles satisfaisant à la condition $A^2 + B^2 = 1$, et i l'expression imaginaire $\sqrt{-1}$, a toutes ses racines réelles. »

93. « Soit $x = f(s, t)$ une fonction réelle de deux variables. Remplaçons-y s par $\frac{z^2+1}{z}$ et t par $\frac{z^2-1}{z}$, ce qui donne

$$(1) \qquad f\left(\frac{z^2+1}{z}, \frac{z^2-1}{iz}\right) = x.$$

Supposons que, cette équation étant résolue par rapport à z, on ait obtenu pour l'une des racines

$$z = \varphi(x, i).$$

Si nous formons l'équation

$$(2) \qquad [\varphi(x, i)]^m = A + Bi,$$

A et B représentant deux quantités réelles telles que $A^2 + B^2 = 1$, et si nous remplaçons i par $\sqrt{-1}$, cette équation (2) aura m racines réelles. »

(Voyez, pour les quatre dernières questions, LAGUERRE, *Nouvelles Annales*, mai 1880 ; BIEHLER, *Nouvelles Annales*, février et avril 1880 ; LAISANT, *Ass. fr.*, Congrès de La Rochelle, 1882.)

94. Racines commensurables de $x^m - m = 0$.

Racines commensurables des équations suivantes, étudiées par Rolle :

95. $$z^2 - 1334z + 257.400 = 0.$$

96. $$z^3 - 234.570z^2 + 976.543.729.126z - 2.929.629.076.275 = 0.$$

97. $$u^2 - 24u + 84 = 0.$$

98. $$z^2 - 24z + 84 = 0.$$

99. $$2z^4 - 3.456z^3 + 58z^2 - 5z - 3 = 0.$$

100. $$3z^5 - 2z^4 + 5z + 8 = 0.$$

101. $$5z^4 + 50z + 375 = 0.$$

Racines commensurables des équations suivantes, étudiées par Newton :

102. $$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0.$$

103. $$x^4 - 6x^2 - 3x - 2 = 0.$$

104. $$x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0.$$

105. $$x^7 - 2x^6 + 3x^5 - 2x^4 + x^3 - 3 = 0.$$

106. $$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0.$$

107. $$x^5 - 4x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0.$$

108. $$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30.$$

Racines commensurables des équations

109. $$4x^3 + 2x^2 - 1 = 0.$$

110. $$16x^4 - 5x^5 + 10x^2 - x + 7 = 0.$$

111. $$9x^3 - 21x^2 + 27x - 7 = 0.$$

112. $$6x^4 - x^3 - 15x^2 - x - 1 = 0.$$

113. $$x^6 - 9x^3 - 12x^2 - 40 = 0.$$

114. $$x^6 - 9x^3 - 12x^2 + 48x - 40 = 0.$$

115. $$x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 40x^2 + 30x - 120 = 0.$$

116. $$x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 30x^3 - 10x^2 - 90x - 120 = 0.$$

117. $$x^4 + 10x + 30 = 0.$$

Ces trois exemples sont donnés par Montucla.

118. $$x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 30x + 24 = 0.$$

Déterminer, s'il en existe, les racines multiples des équations suivantes, ainsi que leurs racines commensurables :

119. $$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 35x - 28 = 0.$$

120. $$3x^4 - \frac{7}{2}x^3 + 7x^2 - 7x + 2 = 0.$$

121. $$y^4 - 7y^3 + 84y^2 - 504y + 864 = 0.$$

122. $$12x^4 - 68x^3 + 97x^2 + 7x - 30 = 0.$$

123. $$x^5 - 19x^3 - 34x^2 + 12x + 40 = 0.$$

124. $$x^9 + 2x^8 + x^7 + 6x^6 + 7x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = 0.$$

125. $$35x^4 - 217x^2 - 219 = 0.$$

126. $$x^7 - 7x^4 + 7x^3 - 1 = 0.$$

127. $$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 9 = 0.$$

128. L'équation

$$36x^6 - 12x^5 + 61x^4 - 22x^3 - 21x^2 + 4x + 2 = 0$$

admet pour racines $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$ deux fois, $\pm\sqrt{-2}$ une fois.

(Finck.)

Résoudre les équations suivantes, étudiées par *Cardan* :

129. $$x^3 - 12x + 9 = 0,$$

130. $$x^3 - 12x - 16 = 0,$$

131. $$x^3 - 12x + 16 = 0.$$

132. Résoudre l'équation suivante, étudiée par *Bombelli* (*Algebra*, Bologne, 1572) :

$$x^3 - 7x - 6 = 0.$$

133. Résoudre l'équation de *Ferrari*

$$x^4 = -6x^2 + 60x - 36.$$

On ajoute aux deux membres la quantité $2nx^2 + n^2$, et on détermine n pour que le second membre soit carré parfait.

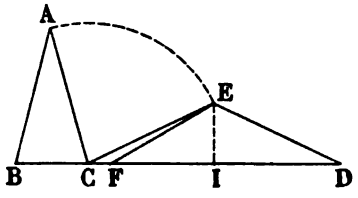
134. D'après *Viète*, la relation

$$(B + D)A - A^2 = BD$$

indique que A a pour valeur B ou D; la relation

$$A^3 - (B + D + G)A^2 + (BD + BG + GD)A = BDG$$

indique que A a pour valeur B, D ou G.



135. Soit à construire les racines de l'équation

$$x^3 = 3b^2x \pm ab^2,$$

dans le cas irréductible.

On construit le triangle ABC, où $AB = AC = b$, et où $BC = a$, puis le triangle CED, où $EC = ED = b$, et où l'angle ECD est le tiers de B. On mène EF égale au double de la perpendiculaire EI. Les racines sont, au signe près, CD, DF et CF.

La figure a toujours la disposition que nous indiquons.

136. *De Sluze* (1668) perfectionnant les méthodes de *Ménechme*, arrive à résoudre les équations des troisième et quatrième degrés par l'intersection d'une parabole et d'un cercle. Appliquer à l'équation suivante :

$$x^3 = a^2b.$$

137. Résoudre l'équation

$$x^3 - 9x + 10 = 0.$$

(Lettre de *Cardan* à *Tartaglia*, 4 août 1539, disant que la méthode de celui-ci est en défaut.)

Résoudre les équations suivantes (*Arithmetica universalis* : exemples donnés par *Newton* et divers auteurs.)

138. $$x^4 + 12x - 17 = 0.$$

139. $$x^4 - 6x^3 - 58x^2 - 114x - 11 = 0.$$

140. $$x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 27x + 9 = 0.$$

141. $$x^3 - 6x^2 + 6x + 12 = 0.$$

142. $$x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0.$$

143. $$x^4 = 8x^3 + 83x^2 - 162x - 936.$$

144. $$x^4 = 20x^3 + 252x^2 - 6.592x + 21.312.$$

145. $$x^7 - 5x^6 + 15x^5 - 23x^4 + 18x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = 0.$$

Résoudre les équations

146. $$x^4 - 6x^3 - 13x^2 - 12x + 4 = 0.$$

147. $$\frac{x(x+1)}{2} + \frac{x^2(x+1)^2}{4} = 20.400.$$

(PACIOLI, *Summa Arithmetica*, Venise, 1494.)

148. $$3\sqrt{a+x} = \sqrt{a - x + \sqrt{ax + x^2}}.$$

149. $$y^6 - 4y^5 + 6y^4 - y^3 + 6y^2 - 4y + 1 = 0.$$

(EULER.)

150 Résoudre l'équation
$$x^3 + px + q = 0,$$
par la méthode de *Bézout*.

On pose
$$\begin{cases} y^3 - 1 = 0, \\ ay^2 + by + x = 0. \end{cases}$$

On élimine ensuite y entre ces équations, et on identifie le résultat avec l'équation donnée.

151. Résoudre l'équation
$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$
par la méthode de *Bézout* (1765).

On pose
$$y^4 - 1 = 0$$
et
$$ay^3 + by^2 + cy + x = 0.$$

On applique ensuite une méthode identique à celle qui a été indiquée pour le troisième degré.

152. Résoudre l'équation du troisième degré par la méthode de *Waring*.

On pose
$$x = a\sqrt[3]{p} + b\sqrt[3]{p^2},$$
d'où
$$x^3 - 3abpx - a^3p - b^3p^2 = 0,$$
et on identifie cette équation avec
$$x^3 + px + q = 0.$$

Pour le quatrième degré, on pose de même
$$x = a\sqrt[4]{p} + b\sqrt[4]{p^2} + c\sqrt[4]{p^3}.$$

153. Conditions pour que l'équation
$$x^4 + px^2 + q = 0$$
ait ses quatre racines réelles.

154. Étudier l'équation
$$x^m + px^n + q = 0.$$
A-t-elle des racines égales ?

155. Déterminer λ de façon que l'équation

$$x^3 + 2x + \lambda + \frac{1}{x} = 0$$

ait le plus possible de racines réelles.

156. En combien de points les parallèles à la bissectrice de l'angle xOy coupent-elles la courbe dont l'équation est

$$(y^2 + x^2)(y - x) - 1 = 0 \text{ ?}$$

157. Un nombre peut-il être égal à son logarithme ?

158. Soit l'équation

$$f^2(x) - 3f(x)\varphi(x) + 2\varphi^2(x) = 0,$$

où f et φ sont deux polynomes entiers en x. Si cette équation admet une racine double α, que peut-on dire de la suivante :

$$f'^2(x) - 3f'(x)\varphi'(x) + 2\varphi'^2(x) = 0 \text{ ?}$$

159. Étudier l'équation

$$ax^7 + bx^5 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Toutes ses racines peuvent-elles être réelles ?

160. Si l'équation $u + \lambda v = 0$, où u et v sont deux polynomes entiers en x et λ une constante, admet une racine double α, que peut-on dire de la suivante :

$$vu' - uv' = 0 \text{ ?}$$

161. L'équation $\operatorname{arc\,tg} x - mx = 0$ a-t-elle des racines réelles ?

En construisant les deux lignes

$$y = \operatorname{arc\,tg} x$$

et

$$y = mx,$$

on voit immédiatement que l'équation proposée admet, outre la racine 0, une infinité de racines égales deux à deux et de signes contraires.

162. Nombre maximum de racines réelles de

$$x^5 + px + q = 0.$$

163. L'équation

$$x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0$$

a une seule racine entre 2 et 3, aucune entre 1 et 2.

164. Limite supérieure des racines positives de l'équation

$$x^5 + q^2x^4 + qx^3 - q^3x^2 - x - 1 = 0, \qquad \text{où} \qquad q = 100.$$

(*Nouvelles Annales.*)

165. Un polynome $f(x)$ de degré n vérifie l'identité

$$nf(x) = (x - a)f'(x) + bf''(x).$$

1° Chercher les coefficients de $f(x)$, ordonné suivant les puissances de $(x - a)$;

2° Chercher les conditions de réalité des racines;

3° Prouver que si b_0 est la valeur absolue de b, les racines de $f(x)$ sont comprises entre

$$a - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}b_0}, \quad a + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}b_0}.$$

(*Ecole Normale*, 1888.)

166. L'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles; soient α et β deux racines consécutives de cette équation. La dérivée s'annule pour une valeur ω comprise entre α et β : démontrer que cette valeur est comprise entre $\frac{\alpha + (n-1)\beta}{n}$ et $\frac{(n-1)\alpha + \beta}{n}$, n étant le degré de l'équation.

(Laguerre.)

167. Si $x = a$ annule $f(x), f'(x), \ldots, f^{i-1}(x)$, sans annuler aucune des dérivées suivantes, la série des fonctions $f(x), f'(x), \ldots$ jusqu'à la dernière dérivée offre, pour $x = a + h$, i variations de moins que pour $x = a - h$. (h est infiniment petit.)

Si $x = a$ annule $f^{(n)}(x), f^{n+1}(x), \ldots, f^{(n+i-1)}(x)$, sans annuler aucune des fonctions précédentes ni suivantes, la série $f(x), f'(x), \ldots$ jusqu'à la dernière dérivée, offre pour $x = a + h$ un nombre pair de variations de moins que pour $x = a - h$.

Déduire de là le théorème de Budan.

(Finck.)

168. « Si l'on désigne par $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ les p premiers coefficients d'une équation, coefficients supposés positifs, et par N et N' les deux coefficients négatifs les plus élevés, le nombre

$$z = 1 + \frac{N + N'}{2A_0 + 2A_1 + \ldots + 2A_{p-2} + A_{p-1}}$$

est une limite supérieure des racines positives de l'équation. »

(Règle de M. G. de Longchamps.)

169. Si N désigne la valeur absolue du plus grand coefficient négatif et $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ les coefficients positifs qui précèdent le premier coefficient négatif,

$$1 + \frac{N}{A_0 + A_1 + \ldots + A_{p-1}}$$

est une limite supérieure des racines positives de l'équation.

(Règle de Laguerre.)

170. Examiner les cas où il conviendra d'employer une de ces deux règles de préférence à l'autre.

171. Soient $$-Ax^{m-p},\quad -Bx^{m-r},\quad -Cx^{m-s},\ldots$$
les termes négatifs d'une équation de degré m. On a une limite supérieure des racines positives en additionnant les deux plus grandes des quantités
$$\sqrt[p]{A},\quad \sqrt[r]{B},\quad \sqrt[s]{C},\ldots$$
(LAGRANGE.)

Appliquer à $x^3 - x^2 + x - 1000 = 0$.

(*Nouvelles Annales.*)

172. « Soient $f(x) = 0$ une équation algébrique, a un nombre positif et
$$\frac{f(x)}{x-a} = f_0 x^{m-1} + f_1 x^{m-2} + f_2 x^{m-3} + \cdots + f_{m-1} + \frac{f_m}{x-a}.$$
Le nombre des variations de la suite
$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{m-1},\ f_m$$
est au moins égal au nombre des racines de l'équation donnée qui sont plus grandes que a. Si le nombre des racines plus grandes que a est inférieur au nombre des variations de la suite, la différence est un nombre pair. »

(Théorème de LAGUERRE.)

Employer une démonstration analogue à celle qui sert à établir le théorème de *Descartes*.

173. Application. — L'équation
$$x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x + 1 = 0$$
a au plus deux racines plus grandes que 1 et n'a pas de racines entre 0 et 1.

(*Nouvelles Annales.*)

174. Étant donnée une équation du troisième degré
$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$
calculer les coefficients m, n, p d'un polynome du second degré $mx^2 + nx + p$ tel que les valeurs que prend ce polynome quand on y remplace x successivement par les trois racines de l'équation proposée soient égales à ces trois racines.

Réciproquement, étant donné un polynome du second degré $mx^2 + nx + p$, calculer les coefficients a, b, c d'une équation du troisième degré
$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$
telle que la propriété énoncée précédemment ait lieu.

(*Question retirée au Concours général de* 1879.)

175. Le produit
$$(1+qz)(1+q^2z)\ldots(1+q^{2n-1}z)\left(1+\frac{q}{z}\right)\cdots\left(1+\frac{q^{2n-1}}{z}\right)$$
est représenté par
$$\frac{A_{-n}}{z^n} + \cdots + \frac{A_{-1}}{z} + A_0 + A_1 z + \cdots + A_n z^n.$$

1° On demande d'exprimer en fonction du paramètre q les coefficients des différentes puissances de la variable z.

2° Le paramètre q étant un nombre réel dont la valeur absolue est inférieure

à l'unité, ou une quantité imaginaire dont le module est inférieur à l'unité, démontrer que le coefficient d'une puissance quelconque de z tend vers une limite quand n augmente indéfiniment, et déterminer cette limite.

(*Question retirée au Concours général de* 1880.)

176. Former un polynome en x, $\varphi_p(x)$, qui s'annule pour $x = 0$ et qui vérifie l'identité

$$\varphi_p(x) - \varphi_p(x-1) = x^p,$$

où p est entier et non nul. (Polynomes de Bernoulli).

(APPELL.)

177. Si une fonction $f(x)$ reste finie et continue dans un intervalle égal numériquement à π, et si sa dérivée est continue dans le même intervalle, le produit

$$P = f(x)[f(x) + f''(x)]$$

ne peut être constamment négatif dans cet intervalle.

La question est susceptible d'interprétation géométrique : on considérera la courbe dont l'équation est en coordonnées polaires.

$$\rho = \frac{1}{f(x)}.$$

(DELLAC, HADAMARD, *Int. des math.*, question 128, p. 69 et 127.)

178. Étudier la fonction $y = \dfrac{1 - x^{2n+1}}{1 - x^2}$.

179. Si l'équation

$$f(x) + af'(x) + a^2 f''(x) \ldots = 0,$$

où a est une constante, a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation $f(x) = 0$.

On le démontre en prenant la dérivée de l'expression

$$[f(x) + af'(x) + a^2 f''(x) + \cdots] e^{-\frac{x}{a}}.$$

CHAPITRE XIV

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — *Calculer* $\int y\,dx$, *y et x étant liés par la relation*

$$(1) \qquad y = x\sqrt{\frac{a - x\sqrt{2}}{a + 3x\sqrt{2}}}.$$

On a

$$-4y\sqrt{2} = \left(\frac{a - x\sqrt{2}}{a + 3x\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[a - x\sqrt{2} - (a + 3x\sqrt{2})\right]$$

$$= (a - x\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}(a + 3x\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}} - (a - x\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}(a + 3x\sqrt{2})^{\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire

$$-12y = (a - x\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}\left[(a + 3x\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}\right]' + (a + 3x\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}\left[(a - x\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}\right]';$$

$$-12y\,dx = \frac{d}{dx}\left[(a - x\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}(a + 3x\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}\right],$$

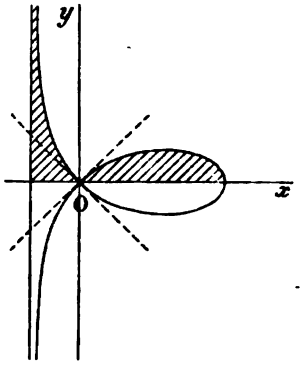
d'où enfin

$$(2) \qquad \int y\,dx = -\frac{1}{12}(a - x\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}(a + 3x\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}.$$

Construisons la courbe $y = x\sqrt{\dfrac{a - x\sqrt{2}}{a + 3x\sqrt{2}}}$.

x ne peut varier que de $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ à $-\dfrac{a}{3\sqrt{2}}$; x allant de $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ à 0, y va de 0

à 0; x allant de 0 à $-\frac{a}{3\sqrt{2}}$, y va de 0 à $+\infty$. La courbe a la forme figurée ci-contre : si on la complète en ajoutant la partie symétrique par rapport à l'axe des x, on obtient la *feuille de jasmin de Roberval* ou *folium de Descartes*. La moitié de l'aire de la boucle s'obtient en prenant l'intégrale (2) entre les limites 0 et $\frac{a}{\sqrt{2}}$; la moitié de l'aire comprise entre la courbe et son asymptote, en prenant cette intégrale entre les limites $-\frac{3a}{\sqrt{2}}$ et 0; on a ainsi



$$\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} y\,dx = \int_{-\frac{3a}{\sqrt{2}}}^{0} y\,dx = \frac{a^2}{12}.$$

En prenant comme axes de coordonnées les bissectrices des axes précédents, l'équation du folium est

$$x^3 + y^3 - axy = 0. \tag{3}$$

Cherchons encore l'aire de la boucle.

Posons à cet effet $y = tx$, d'où

$$x = \frac{at}{1+t^3} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{at^2}{1+t^3}.$$

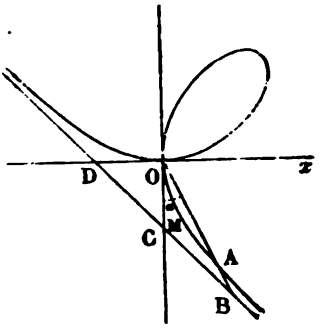
Nous avons alors

$$\int y\,dx = \int tx\,dx = \frac{1}{2}tx^2 - \frac{1}{2}\int x^2 dt = \frac{1}{2}tx^2 - \frac{a^2}{2}\int \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{1}{2}tx^2 + \frac{a^2}{6}\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{2}\frac{a^2t^3}{(1+t^3)^2} + \frac{a^2}{6}\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{6}a^2\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}.$$

En prenant cette intégrale entre les limites ∞ et 0, nous trouvons bien $\frac{a^2}{6}$.

En coordonnées polaires, l'équation (3) devient



$$\rho = \frac{a \sin \omega \cos \omega}{\sin^3 \omega + \cos^3 \omega}.$$

Nous aurons l'aire de la boucle en effectuant l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \rho^2 d\omega.$$

$$\frac{1}{2} \rho^2 d\omega = \frac{a^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega}{2(\sin^3 \omega + \cos \omega^3)^2} d\omega$$

$$= \frac{a^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega (\sin^2 \omega + \cos^2 \omega)}{2(\sin^3 \omega + \cos^3 \omega)^2} d\omega = \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 \omega (1 + \operatorname{tg}^2 \omega)}{2(1 + \operatorname{tg}^3 \omega)^2} d\omega.$$

Posons $\operatorname{tg} \omega = \theta$, d'où $d\omega = \frac{1}{1+\theta^2}$; alors

$$\frac{1}{2} \rho^2 d\omega = \frac{a^2 \theta^2}{2(1+\theta^3)^2} d\theta,$$

et

$$(4) \qquad \int \frac{1}{2} \rho^2 d\omega = -\frac{a^2}{6(1+\theta^3)} = -\frac{a^2}{6(1+\operatorname{tg}^3 \omega)}.$$

Cette intégrale prise de 0 à $\frac{\pi}{2}$ a bien pour valeur $\frac{a^2}{6}$.

Cherchons encore l'aire comprise entre la courbe et son asymptote : soit OAB une droite faisant avec OC, perpendiculaire à l'axe polaire, l'angle α.

L'aire OMA, comprise entre la courbe et la droite OA, s'obtient en prenant l'intégrale (4) depuis $\omega = \frac{\pi}{2} + \alpha$ jusqu'à $\omega = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$\text{surf. OMA} = \frac{a^2}{6(1 - \operatorname{cotg}^3 \alpha)}.$$

D'autre part on trouve aisément que l'aire du triangle OBC est

$$\text{OBC} = \frac{a^2}{18(1 - \operatorname{cotg} \alpha)}.$$

Alors on a

surf. OMABC = surf. OBC — surf. OMA

$$= \frac{a^2}{18} \cdot \frac{3 - (1 + \operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg}^2 \alpha)}{1 - \operatorname{cotg}^3 \alpha} = \frac{a^2}{18} \cdot \frac{2 + \operatorname{cotg} \alpha}{1 + \operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg}^2 \alpha}.$$

En faisant dans cette expression $\alpha = \frac{\pi}{4}$, on a l'aire comprise

entre la courbe, l'asymptote CB et la droite OC, et on trouve $\frac{a^2}{18}$. L'aire comprise entre la courbe et l'asymptote est égale à deux fois cette dernière, plus l'aire $\frac{a^2}{18}$ du triangle DOC.

Considérons la courbe dont l'équation $y_1 = x\sqrt{\frac{x\sqrt{2}-a}{a+3x\sqrt{2}}}$ (5) se déduit de l'équation (1) du problème 93, en changeant le signe de la quantité sous radical.

Pour en effectuer la quadrature, remarquons que $y_1 = iy$, d'où $\int y_1 dx = i\int y\,dx$, et en nous reportant à l'équation (2),

$$\int y_1 dx = -\frac{i}{12}(a - x\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}(a + 3x\sqrt{2})^{\frac{1}{2}},$$

ce qui peut s'écrire :

pour $x > \frac{a}{\sqrt{2}}$, $\int y_1 dx = \frac{1}{12}(x\sqrt{2} - a)^{\frac{3}{2}}(a + 3x\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$;

pour $x < -\frac{a}{3\sqrt{2}}$, $\int y_1 dx = \frac{-1}{12}(a - x\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}(-a - 3x\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$.

Marie a démontré, dans sa *Théorie des fonctions de variables imaginaires*, que les seules courbes du troisième degré quarrables algébriquement ont pour équations

$$y = kx\sqrt{\frac{3m+x}{m-x}} \quad (6) \qquad \text{et} \qquad y = kx\sqrt{\frac{x+3m}{x-m}}. \quad (7)$$

L'équation (6) représente une projection orthogonale ou oblique du *folium*. L'équation (7) [dont l'équation (5) est une forme particulière] représente le *trèfle*, qui admet trois asymptotes réelles. La quadrature de ces courbes se déduira immédiatement des formules qui précèdent.

Dans un très intéressant article paru au mois de juin 1894 dans le *Journal de Mathématiques Spéciales*, M. Aubry indique pour le folium les trois quadratures suivantes, l'équation étant prise sous la forme

$$x^3 + y^3 - xy = 0.$$

1° « Différentions et multiplions par y, il vient

$$3x^2y\,dx + 3y^2dy - xy\,dy - y^2dx = 0.$$

« Remplaçons y^3 par $xy - x^3$, il vient après plusieurs transformations faciles

$$6y\,dx = 3(x\,dy + y\,dx) - \frac{2\,xy\,dy - y^2dx}{x^2},$$

d'où, en intégrant,

$$6\int y\,dx = 3xy - \frac{y^2}{x} \text{ ».}$$

(Marquis de L'HOSPITAL, 1693.)

2° En posant $y = \frac{x^2}{u^2}$, d'où

$$u^6 + x^3 = u^4,$$

il vient

$$3y\,dx = 3\,\frac{x^2}{u^2}\,dx = 4u\,du - 6u^3du,$$

et

$$3\int y\,dx = \frac{x^2}{2y} + \frac{3}{2}\,xy,$$

résultat qui ne diffère du précédent que par une constante.

(Jean BERNOULLI.)

3° « On a une nouvelle quadrature du folium en posant $y = ux^2$: on trouve ainsi

$$x^3 = \frac{u-1}{u^3},$$

d'où

$$3x^2dx = \frac{3\,du}{x^4} - \frac{2\,du}{u^3},$$

$$3ydx = 3ux^2\,dx - \frac{3\,du}{u^3} - \frac{2\,du}{u^2},$$

et en intégrant

$$3A = \frac{2}{u} - \frac{3}{2u^2} = \frac{2x^2}{y} - \frac{3x^4}{2y^2} = \frac{2x^2}{y} - \frac{3x}{2y^2}(xy - y^3) = \frac{3xy}{2} + \frac{x^2}{2y} \text{ ».}$$

(Marquis de L'HOSPITAL.)

Question II. — *Calculer* $\int \frac{dx}{y}$, *x et y étant liés par la relation*

$$(1) \qquad (x^2 - a^2)^2 - 2ay^3 - 3a^2y^2 = 0.$$

La courbe (1) admet évidemment comme points doubles les points $\begin{cases} x = a & x = -a & y = -a \\ y = 0, & y = 0, & x = 0 \end{cases}$: elle est donc unicursale et il est possible d'exprimer les coordonnées x et y d'un de ses points en fonction rationnelle d'un paramètre variable.

Considérons alors les coniques passant par ces trois points et par un

quatrième pris quelconque sur (1), le point $\begin{cases} y = \dfrac{a}{2} \\ x = 0, \end{cases}$ par exemple.

L'équation générale de ces coniques est

$$\lambda xy + \left(\frac{2x+y}{a} - 1\right) xy + 2y^2 + ay - a^2 = 0,$$

ou en posant $\lambda a + 3 = -\theta,$

$$(2) \qquad x^2 - \theta xy + 2y^2 + ay - a^2 = 0.$$

De (2), nous tirons la valeur de $x^2 - a^2$, qui substituée dans (1), donne, après avoir supprimé le facteur y^2 :

$$(3) \qquad \theta^2 x^2 - 2\theta(2y + a)x + 4y^2 + 2ay - a^2 = 0.$$

Nous sommes donc ramenés à trouver l'intersection des coniques (2) et (3) ; et de leurs équations nous tirons

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\theta a(\theta^4 - 8\theta^2 + 2)}{4(\theta^2 - 2)} \\ y &= \frac{a}{8}(\theta^4 - 8\theta^2 + 4) \end{aligned}\right\};$$

par suite $$dx = \frac{3a}{4}(\theta^2 - 2)d\theta,$$

et $$\frac{dx}{y} = 6\,\frac{\theta^2 - 2}{(\theta^2 - 2\theta - 2)(\theta^2 + 2\theta - 2)}\,d\theta.$$

Cette dernière expression s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dx}{y} &= 3\,\frac{(\theta^2 - 2\theta - 2) + (\theta^2 + 2\theta - 2)}{(\theta^2 - 2\theta - 2)(\theta^2 + 2\theta - 2)}\,d\theta \\ &= 3\left[\frac{d\theta}{\theta^2 - 2\theta - 2} + \frac{d\theta}{\theta^2 + 2\theta - 2}\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale cherchée se présente sous la forme

$$\int \frac{dx}{y} = 3\left[\int \frac{d\theta}{\theta^2 - 2\theta - 2} + \int \frac{d\theta}{\theta^2 + 2\theta - 2}\right],$$

ce qui donne comme résultat

$$\int \frac{dx}{y} = 3\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{3} + (1 - \theta)}{\sqrt{3} - (1 - \theta)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{3} - (1 + \theta)}{\sqrt{3} + (1 + \theta)}\right] + k,$$

ou enfin

$$\int \frac{dx}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{L}\left[\frac{\theta^2 - 2\theta\sqrt{3} + 2}{\theta^2 + 2\theta\sqrt{3} + 2}\right] + k,$$

k étant une constante.

Question III. — *Un jardin circulaire renferme en son centre un puits. Un jardinier prend de l'eau dans le puits et s'en sert pour arroser le jardin : combien de temps mettra-t-il pour l'arroser en entier ?*

Soit R le rayon du jardin, O son centre ; traçons deux cercles de centre O, ayant pour rayons ρ et $\rho + d\rho$, puis deux rayons faisant entre eux l'angle $d\omega$, qui coupent le premier cercle en A et B, le deuxième en C et D. Évaluons la surface $ds =$ ABDC :

C'est la différence des secteurs OBD, OAC, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}(\rho + d\rho)^2 d\omega - \frac{1}{2}\rho^2 d\omega,$$

ou, en négligeant les infiniment petits du second ordre, $ds = \rho\, d\rho\, d\omega$, ce qu'on trouverait immédiatement, si on considérait cet élément de surface comme un rectangle de base $AC = \rho\, d\omega$ et de hauteur $AB = d\rho$.

Supposons que le temps employé à l'arrosage soit proportionnel à l'aire arrosée, et qu'il dépende en outre seulement de la distance du point arrosé au puits. Pour l'élément ABDC, nous pouvons le représenter, K étant une constante, par

$$K\varphi(\rho)\, ds = K\rho\, \varphi(\rho)\, d\rho\, d\omega.$$

Pour arroser l'aire comprise entre les deux cercles, il faudra donc un temps représenté par

$$\int_{\omega=0}^{\omega=2\pi} K\rho\, \varphi(\rho)\, d\rho\, d\omega,$$

et le temps total cherché sera

$$T = \int_{\rho=0}^{\rho=R} \int_{\omega=0}^{\omega=2\pi} K\rho\, \varphi(\rho)\, d\rho\, d\omega = \int_{\rho=0}^{\rho=R} K\rho\, \varphi(\rho)\, d\rho \int_{\omega=0}^{\omega=2\pi} d\omega$$

$$= \int_{\rho=0}^{\rho=R} 2\pi K\rho\, \varphi(\rho)\, d\rho = 2\pi K \int_{\rho=0}^{\rho=R} \rho\, \varphi(\rho)\, d\rho.$$

En particulier, si nous posons $\varphi(\rho) = A\rho$, A étant constant, nous aurons

$$T = 2\pi K \int_{\rho=0}^{\rho=R} A\rho^2 d\rho = \frac{2}{3}\pi AKR^3.$$

Remarque. — Si T_0 est le temps nécessaire pour arroser le jardin de rayon 1, nous avons $T = T_0 R^3$.

Question IV. — « SUR LA DÉFORMATION MÉTALLIQUE DES SURFACES ».

« Lorsqu'on cherche à emboutir un disque métallique circulaire, pour lui donner la forme d'un cylindre, il peut être intéressant d'étudier, comme vient de le faire M. Tresca, ce que devient une figure primitivement tracée sur le plan du disque, et particulièrement un quadrillage tracé suivant les directions de deux diamètres perpendiculaires. »

« Les données expérimentales doivent évidemment jouer ici un rôle prépondérant. Si l'on admet, ce qui semble vérifié par les faits, que la densité se conserve, ainsi que l'épaisseur, un calcul facile permet d'établir les formules de transformation. »

« Prenons, en effet, un élément d'aire compris entre deux rayons infiniment voisins et deux cercles concentriques infiniment rapprochés. Nous avons, en appelant a le rayon du cercle de base, r et θ les coordonnées polaires ordinaires, $r\,dr\,d\theta$ pour l'expression de cette aire. Or, après la déformation, elle sera, si nous désignons par z l'ordonnée suivant la génératrice du cylindre, $a\,dz\,d\theta$. Donc

$$a\,dz = r\,dr,$$

et, en intégrant,

$$(1) \qquad r = \frac{z^2 - a^2}{2a}. \text{ »}$$

« Cette formule nous permet de trouver l'équation de toute la ligne, lorsqu'on développera la surface cylindrique sur un plan. Il suffira d'y joindre, en effet, l'équation de l'abscisse

$$(2) \qquad u = a\theta,$$

d'où

$$r = \sqrt{2az + a^2}, \qquad \theta = \frac{u}{a}. \text{ »}$$

« Par exemple, une droite perpendiculaire à l'axe polaire

$$r = \frac{c}{\cos\theta}$$

deviendra, après déformation et développement du cylindre,

$$\sqrt{2az + a^2}.\cos\frac{u}{a} = c. \text{ »}$$

« Cette courbe a pour asymptotes les parallèles à l'axe des z, répondant aux abscisses $u = \pm\frac{\pi}{2}a$. »

(LAISANT, *Assoc. fr.*, Congrès de Paris, 1878.)

Question V. — *Calculer le volume compris dans l'angle des coordonnées positives, et limité par le plan des xy, le plan*

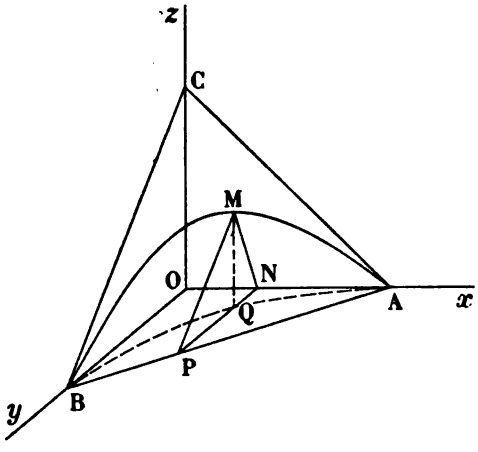
$$(1) \qquad x + y + z = 1$$

et la surface

$$(2) \qquad z = xy.$$

Figurons la section ABC du trièdre des axes par le plan (1) et l'hy-

perbole AMB suivant laquelle ce plan coupe le paraboloïde hyperbolique (2), lequel contient Ox et Oy.



Un plan MPN parallèle à yOz coupe xOy suivant PN, le plan ABC suivant la droite MP et le paraboloïde suivant la droite MN (laquelle s'appuie naturellement sur l'hyperbole et sur la droite Ox, qui sont deux lignes tracées sur le paraboloïde). On peut donc considérer le solide à évaluer comme engendré par le triangle PMN, se mouvant de A en O de manière que ses sommets s'appuient respectivement sur AB, sur l'hyperbole et sur Ox.

Évaluons la surface de ce triangle : ON étant prise égale à x, NP est égale à NA ou à $1-x$. Pour avoir MQ, sa hauteur, remarquons que le cylindre projetant l'hyperbole sur yOz est représenté par

$$x(1-z-x)=z, \tag{3}$$

résultat de l'élimination de y entre (1) et (2).

De (3), nous tirons

$$z=\frac{x(1-x)}{1+x}=\mathrm{MQ}.$$

La surface du triangle est donc

$$\mathrm{PMN}=\frac{1}{2}\frac{x(1-x)^2}{1+x},$$

et le volume V cherché a pour expression

$$\mathrm{V}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x(1-x)^2}{1+x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2-3x+4-\frac{4}{1+x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x-4\mathrm{L}(1+x)\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+4-4\mathrm{L}2\right)=\frac{17}{12}-2\,\mathrm{L}2.$$

Question VI. — « *Sur une même base circulaire on place une demi-sphère et un paraboloïde de révolution dont le paramètre est égal au rayon de la sphère ; déterminer le centre de gravité* (X, Y, Z) *du solide compris entre la sphère, le paraboloïde et un plan mené par l'axe de cette surface.*

« Soient

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$
$$x^2 + y^2 = a(a - 2z),$$

et

$$y = 0$$

les équations de la sphère, du paraboloïde et du plan.

« Si l'on pose

$$y' = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad z' = \frac{a^2 - x^2 - y^2}{2a},$$

et

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

on a

$$Y = \frac{\int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} y\,dx\,dy\,dz}{\int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} dx\,dy\,dz}, \qquad Z = \frac{\int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} z\,dx\,dy\,dz}{\int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} dx\,dy\,dz},$$

et

$$X = 0.$$

« Or

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}(z - z')dx\,dy$$
$$= \int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{4}\pi(a^2 - x^2) - \frac{1}{3a}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]dx$$
$$= \frac{1}{3}\pi a^3 - \frac{1}{3a}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\pi a^3 - \frac{1}{8}\pi a^3 = \frac{5}{24}\pi a^3,$$

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} y\,dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'} y(z - z')\,dx\,dy$$
$$= \int_{-a}^{a}dx\left[-\frac{1}{3}(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4a}(a^2 - x^2)y^2 + \frac{1}{8a}y^4\right]_{y=0}^{y=y'}$$
$$= \int_{-a}^{a}dx\left[\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8a}(a^2 - x^2)^2\right] = \frac{1}{8}\pi a^4 - \frac{2}{15}a^4 = \frac{15\pi - 16}{120}a^4,$$

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}(z^2 - z'^2)\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}dx\left[\frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15a^2}(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}\right]$$
$$= \frac{1}{8}\pi a^4 - \frac{1}{48}\pi a^4 = \frac{5}{48}\pi a^4;$$

et, d'après ces calculs,

$$Y = \frac{15\pi - 16}{25\pi} a, \qquad Z = \frac{1}{2} a. \text{ »}$$

(Le P. M. JULLIEN, *Problèmes de Mécanique rationnelle.*)

Question VII. — QUELQUES MOTS SUR LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES.

Nous définissons et nous représentons les fonctions dites sinus, cosinus, ... hyperboliques de la façon suivante :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{C\,h}\, u &= \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \\ \mathrm{S\,h}\, u &= \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \\ \mathrm{T\,h}\, u &= \frac{\mathrm{S\,h}\, u}{\mathrm{C\,h}\, u}, \\ \mathrm{Cot\,h}\, u &= \frac{\mathrm{C\,h}\, u}{\mathrm{S\,h}\, u}, \\ \mathrm{Séc\,h}\, u &= \frac{1}{\mathrm{C\,h}\, u}, \\ \mathrm{Coséc\,h}\, u &= \frac{1}{\mathrm{S\,h}\, u}. \end{aligned} \right.$$

De là nous déduisons les relations :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{C\,h}^2\, u - \mathrm{S\,h}^2\, u &= 1, \\ \mathrm{Séc\,h}^2\, u + \mathrm{T\,h}^2\, u &= 1. \end{aligned} \right.$$

Comparons ces relations aux suivantes :

$$\text{séc}^2\, \tau - \text{tg}^2\, \tau = 1,$$
$$\cos^2 \tau + \sin^2 \tau = 1.$$

La remarquable analogie qui existe entre elles nous conduit à chercher s'il est possible de poser à la fois

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos \tau &= \mathrm{Séc\,h}\, u, & \sin \tau &= \mathrm{T\,h}\, u, \\ \mathrm{C\,h}\, u &= \text{séc}\, \tau, & \mathrm{S\,h}\, u &= \text{tg}\, \tau. \end{aligned} \right.$$

Or l'une quelconque de ces dernières égalités entraîne les autres : les deux variables τ et u étant liées ainsi par une relation fixe, nous disons que τ est l'*amplitude hyperbolique* de u :

$$(5) \qquad \tau = \mathrm{Am\,h}\, u.$$

Il est visible que l'on a

$$(6)\quad \begin{cases} \mathrm{C\,h}\, u = \cos(ui), & \mathrm{S\,h}\, u = \dfrac{\sin(ui)}{i}, \\ \mathrm{Séc\,h}\, u = \mathrm{séc}\,(ui), & \mathrm{T\,h}\, u = \dfrac{\mathrm{tg}\,(ui)}{i}, \\ \mathrm{Cot\,h}\, u = i \cot(ui), & \mathrm{Coséc\,h}\, u = i\, \mathrm{coséc}\,(ui). \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \cos u = \mathrm{C\,h}\,(ui), & \sin u = \dfrac{\mathrm{S\,h}\,(ui)}{i}, \\ \mathrm{séc}\, u = \mathrm{Séc\,h}\,(ui), & \mathrm{tg}\, u = \dfrac{\mathrm{T\,h}\,(ui)}{i}, \\ \cot u = i\, \mathrm{Cot\,h}\,(ui), & \mathrm{coséc}\, u = i\, \mathrm{Coséc\,h}\,(ui). \end{cases}$$

Les formules connues

$$\begin{cases} \sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v, \\ \cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v, \end{cases}$$

ont ici pour analogues :

$$(8)\quad \begin{cases} \mathrm{S\,h}\,(u+v) = \mathrm{S\,h}\, u\, \mathrm{C\,h}\, v + \mathrm{C\,h}\, u\, \mathrm{S\,h}\, v, \\ \mathrm{C\,h}\,(u+v) = \mathrm{C\,h}\, u\, \mathrm{C\,h}\, v + \mathrm{S\,h}\, u\, \mathrm{S\,h}\, v. \end{cases}$$

Par suite,

$$(9)\quad \begin{cases} \sin(u+vi) = \sin u\, \mathrm{C\,h}\, v + i \cos u\, \mathrm{S\,h}\, v, \\ \cos(u+vi) = \cos u\, \mathrm{C\,h}\, v - i \sin u\, \mathrm{S\,h}\, v, \\ \mathrm{S\,h}\,(u+vi) = \mathrm{S\,h}\, u \cos v + i\, \mathrm{C\,h}\, u \sin v, \\ \mathrm{C\,h}\,(u+vi) = \mathrm{C\,h}\, u \cos v + i\, \mathrm{S\,h}\, u \sin v. \end{cases}$$

Indiquons enfin les formules suivantes, très utiles pour les intégrations :

$$(10)\quad \begin{cases} \mathrm{arc\,C\,h}\, z = \mathrm{L}(z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ \mathrm{arc\,S\,h}\, z = \mathrm{L}(z + \sqrt{z^2 + 1}), \\ \mathrm{arc\,T\,h}\, z = \mathrm{L}\sqrt{\dfrac{1+z}{1-z}}. \end{cases}$$

Remarquons, et ceci est très important, que toute fonction entière de $\sin x$ et $\cos x$, ou de $\sin mx$ et $\cos mx$, est réductible à une expression de la forme $\Sigma a e^{\alpha x}$, où a et α sont deux constantes, en général imaginaires. Or cette expression est intégrable.

Question VIII. — *Un très petit anneau, assimilable à un point, se meut dans un plan. A cet anneau sont fixés des fils passant sur des poulies très*

petites, chaque fil étant tendu par un poids. On demande la position d'équilibre de l'anneau.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les poulies; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les poids tenseurs; $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ les coordonnées des poulies. Soit M l'anneau, de coordonnées (x, y).

La poulie A_1 change le poids p_1 en une tension; cette force a une grandeur p_1 et elle est dirigée suivant MA_1. Ses composantes suivant les axes sont

$$X_1 = p_1 \frac{x_1 - x}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}}, \qquad Y_1 = p_1 \frac{y_1 - y}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}}.$$

Les autres tensions admettent des composantes analogues; exprimons-les par exemple pour celle dirigée suivant MA_n :

$$X_n = p_n \frac{x_n - x}{\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}}, \qquad Y_n = p_n \frac{y_n - y}{\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}}.$$

Les conditions d'équilibre sont donc

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{i=n} p_i \frac{x_i - x}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} p_i \frac{y_i - y}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} = 0.$$

Ces équations déterminent un certain nombre de valeurs d'x et d'y.

1° Dans le cas de deux poulies A_1 et A_2, ces équations s'écrivent

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{p_1(x_1 - x)}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}} = -\dfrac{p_2(x_2 - x)}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}}, \\[2ex] \dfrac{p_1(y_1 - y)}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}} = -\dfrac{p_2(y_2 - y)}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}}. \end{cases}$$

Nous en déduisons en divisant membre à membre, et à la condition qu'aucun des deux radicaux ne soit nul,

$$\frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \frac{x_2 - x}{y_2 - y}.$$

Les points A_1, A_2 et M doivent donc être en ligne droite.

Posons

$$\frac{x_2 - x}{x_1 - x} = \frac{y_2 - y}{y_1 - y} = \lambda,$$

λ n'étant, d'après ce qui précède, ni nul ni infini. La première équation d'équilibre devient

$$\frac{p_1(x_1 - x)}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}} = -\frac{\lambda p_2(x_1 - x)}{\lambda\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}}.$$

Nous avons donc $p_1 = -p_2$. Ainsi il faut, pour que l'équilibre soit possible, que les deux poids tenseurs soient égaux.

Les équations (2) élevées au carré et ajoutées donnent $p_1^2 = p_2^2$. Si un des radicaux est nul, cette hypothèse ne fait qu'assigner à l'anneau une position particulière A_1 parmi toutes celles qu'il peut avoir, et cette solution n'offre rien de particulier.

Remarquons que p_1 et p_2 étant supposés positifs, toutes les positions d'équilibre admissibles sont situées entre A_1 et A_2.

2° Considérons le cas de trois points A_1, A_2 et A_3. Désignons par μ_1, μ_2 et μ_3 les angles sous lesquels on voit du point M les côtés du triangle $A_1A_2A_3$. Les forces p_1 dirigée suivant MA_1, p_2 dirigée suivant MA_2, p_3 dirigée suivant MA_3 doivent se faire équilibre : chacune d'elles doit donc être égale à la résultante des deux autres, ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} p_1^2 &= p_2^2 + p_3^2 + 2p_2p_3 \cos \mu_1 \\ p_2^2 &= p_3^2 + p_1^2 + 2p_3p_1 \cos \mu_2 \\ p_3^2 &= p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos \mu_3 \end{aligned}\right\},$$

relations qui déterminent $\cos \mu_1$, $\cos \mu_2$ et $\cos \mu_3$ en fonction de p_1, p_2 et p_3.

Il existe entre les angles μ la relation

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2\pi,$$

et par suite

$$\cos^2 \mu_1 + \cos^2 \mu_2 + \cos^2 \mu_3 - 2 \cos \mu_1 \cos \mu_2 \cos \mu_3 = 1.$$

Cette relation est bien vérifiée identiquement, comme on le voit en remplaçant les trois cosinus en fonction des p dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \mu_3 & \cos \mu_2 \\ \cos \mu_3 & 1 & \cos \mu_1 \\ \cos \mu_2 & \cos \mu_1 & 1 \end{vmatrix},$$

et ajoutant toutes les lignes ou toutes les colonnes.

Il est en effet de simple bon sens qu'il y a toujours, quels que soient les p, au moins une position d'équilibre intérieure à l'aire du triangle. Il serait moins facile de voir s'il n'y en a qu'une, au moins par des considérations purement algébriques.

Mais on peut facilement construire géométriquement la position d'équilibre. Les trois forces p_1, p_2, p_3 agissant en M forment en effet un triangle entièrement connu puisqu'on en a les trois côtés. Les angles de ce triangle sont les suppléments des angles μ. Il ne reste donc qu'à construire sur A_1A_2 et sur A_1A_3 deux segments circulaires capables

d'angles connus. Ils se coupent en un point réel et unique où passerait aussi le troisième segment fait sur A_2A_3.

3° En général, si nous attribuons à l'anneau un déplacement virtuel $(\delta x, \delta y)$ dans le plan, le travail virtuel correspondant est la somme des expressions

$$\frac{p_i}{r_i}[(x_i - x)\delta x + (y_i - y)\delta y] = -\frac{p_i}{r_i} r_i \delta r_i,$$

ou des variations des quantités telles que $-p_i r_i$. Si donc on pose

$$-\Sigma p_i r_i + c = U,$$

les équations d'équilibre peuvent s'écrire (voyez Ch. V, question V)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

C'est dès lors parmi les positions d'équilibre que se trouvent les positions de l'anneau pour lesquelles la fonction U est maxima ou minima.

Des valeurs

$$\sum \frac{p_i}{r_i}(x_i - x) = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \sum \frac{p_i}{r_i}(y_i - y) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

des deux dérivées partielles de U, nous concluons

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \sum\left[-\frac{p_i}{r_i} + \frac{p_i}{r_i^3}(x_i - x)^2\right] = -\sum \frac{p_i}{r_i^3}(y_i - y)^2, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= \sum \frac{p_i}{r_i^3}(x_i - x)(y_i - y), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= -\sum \frac{p_i}{r_i^3}(x_i - x)^2. \end{aligned}\right.$$

Soit (ξ, η) une position d'équilibre. En un point suffisamment voisin, $(\xi + \delta\xi, \ \eta + \delta\eta)$, on aura, en désignant par ρ_i les distances des points fixes à cette position d'équilibre de l'anneau,

$$U = (C - \Sigma p_i \rho_i) - \frac{1}{2}\frac{p_i}{\rho_i^3}\left[(y_i - \eta)^2 \delta\xi^2 - 2(y_i - \eta)(x_i - \xi)\delta\xi\,\delta\eta + (x_i - \xi)^2 \delta\eta^2\right] + \cdots,$$

(les termes négligés étant d'ordre supérieur au second) ou bien

$$U = (C - \Sigma p_i \rho_i) - \frac{1}{2}\sum \frac{p_i}{\rho_i^3}\left[(y_i - \eta)\delta\xi - (x_i - \xi)\delta\eta\right]^2 + \cdots$$

Il s'ensuit que la position d'équilibre considérée répond toujours à un maximum de U ou à un maximum de $\Sigma p_i r_i$.

De là résultent ces deux conséquences :

1° que, en vertu de la Théorie de la stabilité de l'équilibre, toutes les positions où l'anneau reste au repos sont positions d'équilibre stable ;

2° qu'il ne peut y avoir en réalité pour l'anneau qu'une position d'équilibre, car la fonction $\Sigma p_i r_i$, qui est infinie quand l'anneau est indéfiniment éloigné, ne peut avoir que des minima à distance finie, et dès lors n'en a qu'un seul.

Ainsi l'anneau se place en une position d'équilibre stable, qui est telle que la somme des distances aux poulies affectées chacune d'un coefficient égal au poids du cordon correspondant est la plus petite possible.

3° Supposons que des centres de production A_1,, A_2, ... soient donnés, et qu'on veuille établir, dans l'intérieur du moindre polygone convexe qui les contient tous, un centre de trafic où viennent se réunir les marchandises fournies par ces diverses localités, pour être distribuées ensuite sur une voie destinée à passer en ce point. On pourra se proposer d'établir la station de manière à rendre minimum le prix total de transport, c'est-à-dire la somme des produits des distances qui la séparent des divers centres par le poids p_1, ou p_2, ... que fournit chacun d'eux.

On disposera sur une planchette autant de poulies qu'il y a de centres, suivant une figure semblable à celle qu'ils forment. On tendra sur chacune un fil chargé d'un poids proportionnel à celui du trafic correspondant et, tous ces fils étant attachés à un même anneau représentant la station, on laissera l'appareil prendre son état de repos. La position où se fixera l'anneau sera le lieu cherché, les fils donneront les directions et les longueurs des routes à établir pour les communications. — Si d'ailleurs la voie où la station doit être établie était déjà faite, il faudrait la réaliser sur la planchette au moyen d'un fil métallique courbé suivant sa forme et à l'échelle adoptée, puis procéder de même, après avoir engagé l'anneau sur ce fil.

Cette intéressante question de pratique a été indiquée pour la première fois par Lamé et Clapeyron, alors jeunes ingénieurs employés par le Gouvernement russe à la construction de ses premières voies ferrées.

QUESTIONS PROPOSÉES

I. — Quadratures en coordonnées cartésiennes.

1. Construire la courbe $y = m\frac{e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}}{2}$, appelée chaînette ou cosinusoïde hyperbolique.

Soit A le point de la courbe situé sur Oy, M un point quelconque de la courbe, MP son ordonnée. Démontrer :

1° que la projection de MP sur la normale en M est constante;

2° que l'aire OAMP est équivalente au produit de OA par la longueur de l'arc AM.

2. Trouver l'aire comprise entre l'axe Ox, deux ordonnées et un arc de cycloïde.

Les équations de la cycloïde sont

$$x = a(u - \sin u),$$
$$y = a(1 - \cos u).$$

On peut aussi employer son équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}}.$$

3. Même question pour la développée d'ellipse.

Son équation est $$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

on posera $$\frac{x}{a} = \cos^3\varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{y}{b} = \sin^3\varphi.$$

4. Même question pour la logarithmique $y = Lx$.

5. Même question pour l'hyperbole $x^m y^n = k^2$.

Même question pour la parabole $y^m = px^n$.

L'arc de la courbe divise le rectangle xy dans un rapport constant. — Démontrer que cette propriété caractérise la courbe.

6. Aire comprise entre l'axe des x, les droites représentées par $x = 0$, $x = 1$, et la courbe dont l'équation est

$$y = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)}.$$

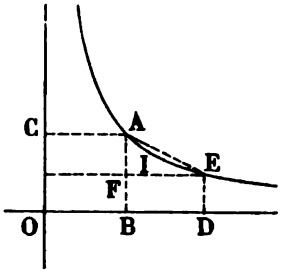
7. Aire comprise entre l'axe des x, deux ordonnées variables et la courbe

$$y = x\sqrt[m]{x + a}. \qquad \text{(Stone).}$$

8. Soit une hyperbole équilatère rapportée à ses axes; on considère les

points a, b, c, ..., dont les abscisses OA, OB, OC,... sont en progression géométrique.

Les aires ABba, BCcb, ... sont égales, ainsi que les aires des secteurs Oba, Ocb, ... (Le P. Grégoire de Saint-Vincent, 1647.)



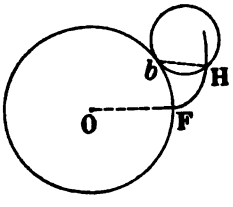
9. Soit une hyperbole équilatère AIE; OBAC un carré de côté 1 ; on prend BD = OB.

D'après *lord Brouncker* (1657) on a

$$\text{aire ABDE} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \cdots,$$

$$\text{aire AFE} = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \cdots,$$

$$\text{aire AIE} = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \cdots$$



10. Un cercle de diamètre d roule sur un cercle de diamètre D : soit FH l'arc d'épicycloïde décrit par un point du cercle ; on a

$$\frac{\text{aire segment circulaire } b\text{H}}{\text{aire épicycloïde } b\text{HF}} = \frac{\text{D}}{3\text{D} + 2d}.$$

Examiner ce qu'est la droite bH.

11. D'après *Simpson*, *Lambert*, etc., l'aire d'un quart d'ellipse s'écrit

$$\frac{1}{4}\pi\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1.3}{4.16}e^4 - \frac{1.9.5}{4.16.36}e^6 - \frac{1.9.25.7}{4.16.36.64}e^8 - \cdots\right),$$

en supposant $a = 1$ et $e = \sqrt{a^2 - b^2}$.

12. L'aire du quart d'ellipse (les demi-axes étant a et b) peut encore s'écrire

$$\sqrt{ab}\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816} - \cdots\right).$$

13. Aire de la courbe fermée représentée par l'équation

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Résultat $\frac{4}{3}a^2$. (Breton.)

14. L'aire comprise entre la courbe

$$x^2(a^2y^2 + b^2x^2) = a^4y^2$$

et ses deux asymptotes est équivalente à celle de l'ellipse de demi-axes a et b.

(Barisien.)

II. — Cubatures.

15. Le volume engendré par un segment de parabole tournant autour de son axe (ce qu'on appelait autrefois *conoïde parabolique*) est la moitié du cylindre de même base et de même hauteur.

(Archimède, *de Conoïdibus et Spheroïdibus*.)

16. Trouver le volume engendré par un segment de cercle tournant autour de sa corde.

Soit AMB le segment, MP perpendiculaire à la base AB du segment, MI perpendiculaire au plan AMB et égale à $2\pi MP$. Kepler remarque que le volume cherché est équivalent à celui qu'engendre le triangle AMB, quand le point M décrit l'arc du segment.

17. Même question pour un segment d'ellipse dont la corde est parallèle à un axe de la courbe.

18. Trouver le volume engendré par un segment de parabole tournant autour de la tangente au sommet, ou de la base, ou de la tangente à une extrémité de la base. (GULDIN)

19. Soit CG un arc de parabole, GH parallèle et GH perpendiculaire à l'axe, trouver le volume engendré par CGH tournant autour de GH. (GULDIN.)

20. Trouver le volume engendré par une cycloïde tournant autour de sa base ou de son axe.

21. Mêmes questions pour un segment de cycloïde. (PASCAL, 1658.)

22. Volume engendré par une hyperbole tournant autour de son asymptote. (TORRICELLI, 1644.)

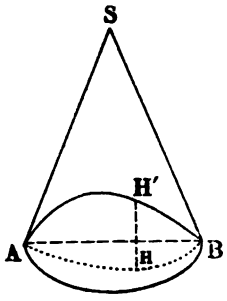
23. Volume engendré par la logarithmique tournant autour de son asymptote. (HUYGENS.)

24. Même question pour la cissoïde. (WALLIS.)

25. Même question pour la conchoïde de droite. (WALLIS.)

26. Volume engendré par un segment d'hyperbole tournant autour de son axe transverse.

27. Soit ABCD un rectangle; on considère un demi-cercle ayant CD pour diamètre et dont le plan est perpendiculaire à celui du rectangle. Trouver le volume engendré par une droite qui se meut en s'appuyant sur le cercle et sur la droite AB parallèle à CD, en restant parallèle à un plan perpendiculaire à AB. Ce corps est appelé *Cuneo-cuneus* par Wallis ; une voûte d'une porte d'un faubourg de Paris ayant eu cette forme, on a appelé la surface *Arrière-voussure de Saint-Antoine ;* c'est aussi la *Voûte d'arête en tour ronde.*



28. Soit SAB un demi-cône droit. AHB une ligne quelconque tracée dans le plan de la base, AH'B l'intersection du cône avec le cylindre droit de base AHB; évaluer le volume ASBH' déterminé entre le cône et la surface engendrée par une droite qui passe par le centre de la base en rencontrant l'arc AH'B. (PARENT, MONTUCLA.)

Cas où AHB est un arc de parabole, d'axe perpendiculaire à AB.

(GRÉGOIRE de SAINT-VINCENT.)

29. Trouver le volume d'un ellipsoïde de révolution.

On trouve $\frac{4}{3}\pi ab^2$, b étant le demi-axe de révolution.

30. Trouver le volume d'un ellipsoïde quelconque.

Résultat $\frac{4}{3}\pi abc$.

31. Trouver le volume du tore.

Résultat : $2\pi R r^2$, R étant la distance du centre du cercle méridien à l'axe, et r son rayon.

32. On considère une conchoïde de Nicomède, ayant A pour pôle. Son axe ABC coupe l'asymptote en B et une branche de la courbe en C; une droite AB'C' coupe l'asymptote en B' et la même branche en C' : trouver le volume engendré par l'espace BCC'B' tournant autour de BC.

III. — Centres de gravité.

33. Centre de gravité de la surface d'un quart de cercle, — d'un secteur elliptique compris entre deux diamètres conjugués, — d'un segment compris entre une ellipse et une corde joignant les extrémités de deux diamètres conjugués.

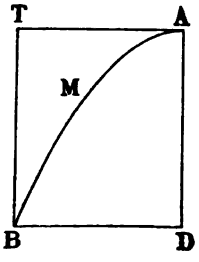
34. Centres de gravité d'une cycloïde, d'un segment de cycloïde.

35. Centre de gravité d'un arc CAC_1 de chaînette, les points C et C_1 étant équidistants du sommet A.

36. Centre de gravité de l'espace compris entre une chaînette, l'axe des x, l'ordonnée du sommet et une ordonnée variable.

37. Centre de gravité de l'espace ADE, compris entre deux paraboles égales AD, AE, se touchant l'une et l'autre au sommet A, et la ligne droite DE parallèle à l'axe commun des deux paraboles.

38. Centre de gravité de l'espace compris entre une hyperbole et deux droites parallèles à l'axe transverse.



39. Centre de gravité d'un segment de sphère.

40. Centre de gravité du solide engendré par la révolution de l'espace parabolique AMBD tournant autour de son axe AD (Archimède).

41. Même question, lorsque le même espace tourne autour d'une parallèle TB à AD.

42. Centre de gravité d'un conoïde hyperbolique (l'axe de révolution est ou l'axe transverse, ou l'axe imaginaire).

43. Centre de gravité du solide engendré par un quart d'ellipse tournant autour d'un de ses axes.

44. Centre de gravité de la surface d'un conoïde parabolique.

IV. — Rectification des courbes en coordonnées cartésiennes.

45. Longueur d'un arc de parabole $y^2 = 2px$.

On trouve $\frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2} \mathrm{L} \frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$, en faisant commencer l'arc au sommet.

46. Longueur d'un arc d'hélice.

47. Longueur d'un arc de cissoïde.

48. Longueur d'un arc d'hyperbole.

L'équation de l'hyperbole étant $y = \frac{a^2}{x}$, on développe en série l'expression $\sqrt{1+y'^2}dx$, et on trouve en intégrant

$$x - \frac{a^4}{2.3\,x^3} + \frac{a^8}{2.4.7\,x^7} - \frac{1.3\,a^{12}}{2.4.6.8.11\,x^{11}} + \ldots$$

49. Un cercle de diamètre d roule, à l'intérieur, sur un cercle de diamètre D. L'épicycloïde engendrée par un point du cercle a pour longueur

$$S = 4d\frac{D+d}{D}.$$

(On suppose que D soit divisible exactement par d.)

50. Si le cercle d roule à l'intérieur du cercle D, on a

$$S = 4d\frac{D-d}{D}.$$

V. — Quadratures en coordonnées polaires.

51. Trouver l'aire d'un secteur elliptique.
(L'origine est supposée en un foyer.)

52. Même question pour un secteur parabolique.

53. Même question pour un secteur de cardioïde.
L'équation de la courbe est $\rho = R + R\cos\omega$.

54. Même question pour la courbe $\rho = \frac{\omega}{2\pi}$.

Évaluer l'aire comprise entre deux spires. Cette courbe, inventée par *Conon de Syracuse*, a été étudiée par *Archimède*.

55. Même question pour la spirale $\rho = a\omega^n$, où n est entier et positif.

56. Trouver l'aire enserrée dans la courbe

$$\rho^2 = a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega.$$

57. On considère une conchoïde de Nicomède : trouver l'aire comprise entre deux rayons vecteurs passant par son pôle, l'asymptote et une branche de la courbe.

VI. — Rectification des courbes en coordonnées polaires.

Trouver la longueur :

58. d'un arc de cardioïde,

59. d'un arc de cycloïde,

60. d'un arc de spirale d'Archimède.

61. Déterminer une courbe qui fasse avec son rayon vecteur un angle constant (Descartes au P. Mersenne.) Elle a une longueur finie dans une infinité de spires [1].

VII. — Rayons de courbure, développées, etc.

62. Trouver le rayon de courbure d'une conique. Cas de la parabole.

---

(1) Les coquilles s'enroulent suivant des courbes qui sont sensiblement des spirales logarithmiques.

Soit $\rho = e^{m\omega}$ l'équation d'une pareille courbe. Si par le pôle on tire une ligne droite indéfinie, et qu'on désigne par $\rho_n, \rho_{n+2}, \rho_{n+4}, \ldots$ les distances du pôle aux points où cette droite rencontre plusieurs spires consécutives, et par $\rho_{n+1}, \rho_{n+3}, \ldots$ les distances aux points où le prolongement de la même droite rencontre les prolongements des mêmes spires, on a

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = \dfrac{\rho_{n+2}}{\rho_{n+1}} = \cdots = e^{m\pi}, \\[2ex] \dfrac{\rho_{n+2} + \rho_{n+1}}{\rho_{n+1} + \rho_n} = \dfrac{\rho_{n+3} + \rho_{n+2}}{\rho_{n+2} + \rho_{n+1}} = \cdots = e^{m\pi}. \end{cases}$$

Ces deux systèmes de relations sont propres à être vérifiés expérimentalement. Le second est d'un usage plus commode en ce qu'il n'exige pas la connaissance du pôle, généralement mal déterminé sur la coquille : c'est celui qu'a employé *Elie de Beaumont*, opérant sur des *ammonites*.

(Société Philomathique de Paris, 1841.)

63. Trouver le rayon de courbure de la cycloïde et l'équation de sa développée. Le rayon de courbure est double de la normale. La développée est égale à la courbe.

64. Équation de la développée d'une spirale logarithmique. La développée est égale à la courbe.

65. Équation de la développée de la courbe

$$a^2x^2 + b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2,$$

qui est la podaire d'une ellipse par rapport à son centre. On trouve

$$\left[(2b^2 - a^2)a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} + (2a^2 - b^2)b^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}\right]\sqrt{a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}} = ab(a^2 - b^2).$$

(*Nouvelles Annales.*)

66. Le rayon de courbure d'une ellipse est représenté par

$$\rho = \frac{b^2}{a\cos^3\varphi},$$

où φ est le demi-angle des rayons qui joignent le point considéré aux foyers.

67. Développée de la courbe

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

La développée est semblable à la courbe et de dimensions moitié. On le verra si on transforme l'équation trouvée en faisant tourner les axes de $\frac{\pi}{4}$.

68. Déterminer la courbe qui coupe orthogonalement les hyperboles ayant même centre et un sommet commun.

(Problème proposé par *Leibniz* à *Newton* dans leur querelle relative à l'invention du Calcul différentiel.)

69. Trouver la sous-tangente de la courbe

$$y = \frac{ax - x\sqrt{ax}}{x - a}.$$

(Problème proposé par *Rolle* à *Saurin*. Le premier montra, il faut croire, dans la querelle qu'ils eurent ensemble, un bien mauvais caractère, puisque l'Académie, prise comme juge, « renvoie M. Saurin à son bon cœur » ; 1705).

70. Déterminer une courbe qui coupe un système de paraboles de même axe et de même sommet de manière que les segments de paraboles, comptés à partir du sommet, aient la même longueur.

71. Déterminer une courbe qui coupe les paraboles de même axe et de même sommet sous un angle constant.

72. Une parabole se transporte parallèlement à elle-même : déterminer une courbe qui la coupe sous un angle constant.

73. Lieu du centre d'une ellipse qui se meut parallèlement à elle-même en touchant une ellipse fixe. (Jean BERNOULLI.)

74. « La courbe dont l'équation est $\rho = R \sin 2\omega$ jouit de la propriété suivante. Elle coupe toutes les hyperboles équilatères $\rho^2 = \frac{\lambda^2}{\sin 2\omega}$ en des points où le rayon de courbure de ces hyperboles est constant. »

(E. LEMOINE. *Journal de Math. Spéciales*, juin 1894.)

75. La développée d'une spirale logarithmique, sa caustique (pour un point lumineux placé au point asymptote), etc., sont des spirales logarithmiques.

Sur le tombeau de Bernoulli est gravée une de ces courbes avec l'inscription : « *eadem mutata resurgo* ».

76. La caustique d'une cycloïde, pour des rayons parallèles à l'axe, est une cycloïde.

77. Construire la courbe représentée par l'équation

$$dy = \frac{p\left(c + \frac{x^2}{2}\right)dx}{\sqrt{b^4 - p^2\left(c + \frac{x^2}{2}\right)^2}}.$$

Cette courbe, appelée *Elastique*, est dessinée par une lame de ressort fixée horizontalement par une de ses extrémités à un plan vertical, et chargée d'un poids à l'autre extrémité. (Jacques BERNOULLI, 1703.)

Un linge attaché lâchement par deux côtés opposés à deux lignes parallèles horizontales de même hauteur, et rempli de liquide qui ne peut s'échapper, forme une surface dont la section droite, appelée quelquefois *Linéaire*, est en somme la même courbe que la précédente. (Jean BERNOULLI, 1714.)

Soit l'équation la plus simple de l'Elastique :

$$dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}};$$

démontrer que l'ordonnée y s'exprime par la formule

$$y = \frac{x^3}{3.a^2} + \frac{1.x^7}{2.7.a^6} + \frac{1.3.x^{11}}{2.4.11.a^{10}} + \frac{1.3.5\ x^{15}}{2\ 4.6.15.a^{14}} + \cdots$$

(*Ars conjectandi*, p. 297 : « invenire relationem coordinatorum Curvæ elasticæ per seriem ».)

78. On enroule sur un cône droit un plan où est tracée une spirale logarithmique, le sommet du cône étant le point asymptote de la spirale. Sur cette courbe gauche obtenue ainsi, on enroule un fil flexible et inextensible et on développe le fil en le maintenant tangent à la courbe. Quelle est la courbe décrite par son extrémité ?

(GERGONNE.)

79. Marquez sur un axe $x'x$, de gauche à droite et dans l'ordre indiqué, les points T 1 4 5 2 6 7 8 9. Soit 3 un point situé au-dessus de l'axe et sur la per-

pendiculaire à lui menée en 2. Une courbe 13 est telle que la somme des six droites 34, 35, 36, 37, 38, 39 menées d'un point quelconque 3 de la courbe ait une somme constante g. Démontrez que T2 est à 23 comme

$$\frac{23}{34}+\frac{23}{35}+\frac{23}{36}+\frac{23}{37}+\frac{23}{38}+\frac{23}{39}$$

est à

$$-\frac{24}{34}-\frac{25}{35}+\frac{26}{36}+\frac{27}{37}+\frac{28}{38}+\frac{29}{39},$$

T^3 étant la tangente en 3 à la courbe.

(Newton, cité par Mansion, *Esquisse de l'histoire du Calcul infinitésimal.*)

VIII. — Complanation des surfaces.

80. Pappus démontre que si du sommet d'un hémisphère on décrit une spirale par un point partant de ce sommet et marchant uniformément sur le quart de cercle qu'il parcourra pendant que ce quart de cercle fera une révolution entière, d'un mouvement uniforme, autour de l'axe de l'hémisphère, la portion de surface sphérique comprise entre la spirale et la base égale le carré du diamètre.

81. Surface d'un espace cylindrique dont tous les points sont à une distance D d'un point du cylindre égale au diamètre du cylindre. — On trouve D^2.

82. Aire engendrée par la cycloïde en tournant autour de sa base (le P. Mersenne, Torricelli), autour de son axe (De Roberval).

83. Trouver la surface engendrée par un segment de cycloïde (compris entre la courbe et une parallèle à l'axe) tournant autour de la base ou de l'axe de la courbe. (Pascal, 1658.)

84. Si sur la base d'un cône droit on élève un prisme droit, ayant pour base une figure quelconque, ce prisme découpe sur le cône une surface qui est à celle de la base du prisme comme le côté du cône au rayon de sa base (ut latus Coni ad radium basis Coni).

(Bernoulli *Opera*, tome I, p. 160.)

85. Trouver la surface de l'ellipsoïde de révolution. Résultats :

ellipsoïde allongé $(a > b)$, $2\pi\left(b^2+\frac{ab}{c}\text{arc sin } c\right)$,

ellipsoïde aplati $(a < b)$, $2\pi\left(b^2+\frac{a^2}{2c}\text{L}\frac{1+c}{1-c}\right)$,

où on a posé $c^2=\frac{b^2-a^2}{a^2}$.

86. La surface d'un cylindre oblique à base circulaire est équivalente à celle d'un rectangle dont un côté serait le diamètre du cercle et l'autre côté la circonférence d'une ellipse ayant pour axe la hauteur et l'arête du cylindre.

(*Nouvelles Annales.*)

87. Aire découpée sur le cylindre

$$y^2 = rx - x^2$$

entre le plan $z = 0$ et la surface

$$z^2 - 2rx + x^2 + y^2 = 0.$$

88. Si sur la base d'un hémisphère on élève un cylindre circulaire droit dont la base est tangente à celle de l'hémisphère, la partie de la surface latérale du cylindre comprise à l'intérieur de l'hémisphère est exactement quarrable.

Trouver les surfaces engendrées par la rotation :

89. D'un arc de parabole (commençant au sommet) autour de son axe.

90. D'un arc d'ellipse (commençant à un sommet) autour d'un axe.

91. D'un arc d'hyperbole (commençant à un sommet) autour d'un des axes, réel ou imaginaire.

92. D'un arc d'hyperbole équilatère tournant autour d'une asymptote.

93. De l'arc infini de la logarithmique autour de son asymptote.

94. De l'arc infini de la cissoïde autour de son asymptote.

IX. — Questions diverses.

95. Poids d'un cône non homogène, la densité de chaque point étant

$$D = D_0 (1 + kx^2),$$

D_0 étant la densité à la base, x la distance du point à la base.

96. Soit une loxodromie joignant un point C de la sphère à l'équateur en A : connaissant la latitude de C, ainsi que l'angle constant que fait la loxodromie avec les méridiens, trouver sa longitude.

97. Une pelouse rectangulaire est bordée par une rivière. Un ouvrier en arrache le gazon et va le jeter dans la rivière ; combien de temps mettra-t-il pour l'arracher en entier ?

On divisera la pelouse en rectangles élémentaires, par des parallèles à ses deux côtés, et on sera ramené à effectuer l'intégrale

$$T = \int\int K\varphi(x)dxdy,$$

x étant la *distance de l'élément de surface à la rivière.*

98. Une hélice étant tracée sur un cylindre de révolution, il est possible d'imprimer à la surface un double mouvement, de translation suivant son axe et de rotation autour de cet axe, de manière que l'hélice coïncide avec

elle-même. (D'où une certaine analogie entre cette courbe, le cercle et la ligne droite.)

99. L'équation de la *tractoire* étant $ds = \frac{ady}{y}$, trouver : 1° l'aire comprise entre la courbe, l'axe ox et deux ordonnées ; 2° le volume engendré par un segment de courbe tournant autour de son axe ; 3° la surface de ce même corps.

100. On considère la tranche de cylindre de révolution comprise entre la base, la surface latérale et un plan qui rencontre la base avant d'avoir coupé la surface entière du cylindre. Trouver la surface latérale et le volume de ce corps, dit *onglet de cylindre.*

101. Trouver le volume compris entre le plan des xy, la surface $z^2 = 2xy$ et le plan $x + y + z - 1 = 0$.

Le résultat s'obtient très simplement par la géométrie.

102. Trouver l'aire totale de la courbe dont l'équation est

$$(1) \qquad (x^2 + y^2)^2 = 2ayx^2,$$

ou

$$(2) \qquad \rho = 2a \sin \omega \cos^2 \omega,$$

qui peut enfin être représentée, en fonction du paramètre θ, par

$$(3) \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{2a \sin^2 \theta}{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{cotg}\theta}, \\ y = -x \operatorname{cotg}\theta. \end{cases}$$

Résultat : $\frac{\pi a^2}{8}$.

(*Mathesis*, août 1894.)

103. On considère la podaire d'une cardioïde par rapport à son point de rebroussement. Si a désigne la distance du point de rebroussement au sommet de la courbe, le périmètre de cette podaire est $\frac{3\pi a}{2}$ et son aire est $\frac{15\pi a^2}{32}$. La développée de cette aire a un périmètre équivalent à $\frac{3\pi a}{2}$ et une aire dont l'expression est $\frac{3\pi a^2}{64}$.

(E. N. Barisien, — *Mathesis*.)

X. — Fonctions hyperboliques.

104. Trouver l'expression des fonctions hyperboliques inverses :

$$\operatorname{arc} \operatorname{Sh} u = \frac{\arcsin (iu)}{i}, \text{ etc.}$$

Étudier les variations des fonctions hyperboliques, leurs valeurs pour 0, $\frac{i\pi}{2}$, $i\pi$, $\frac{3i\pi}{2}$. Expression des fonctions $\operatorname{Sh}(-u)$, $\operatorname{Ch}(-u)$, ...

105. Dérivées des fonctions directes ou inverses.

106. On a (voir p. 222) $\quad \mathrm{Th}\,\frac{u}{2} = \frac{\mathrm{Sh}\,u}{1+\mathrm{Ch}\,u},$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\tau}{2} = \mathrm{Th}\,\frac{u}{2}.$$

107. Construire en coordonnées rectangulaires la courbe qui représente la relation entre τ et u : expression du rayon de courbure en un point.

108. Trouver les S h, C h, ..., de $2u$, de $3u$.

109. Trouver $\mathrm{Sh}\,mu$ et $\mathrm{Ch}\,mu$ (m entier) en fonction de $\mathrm{Sh}\,u$ et $\mathrm{Ch}\,u$. Les formules trouvées peuvent s'écrire

$$\mathrm{Ch}\,mu = \frac{1}{2}[(\mathrm{Ch}\,u + \mathrm{Sh}\,u)^m + (\mathrm{Ch}\,u - \mathrm{Sh}\,u)^m],$$

$$\mathrm{Sh}\,mu = \frac{1}{2}[(\mathrm{Ch}\,u + \mathrm{Sh}\,u)^m - (\mathrm{Ch}\,u - \mathrm{Sh}\,u)^m].$$

En posant $\pi = \mathrm{L}(1+\sqrt{2}) = \mathrm{arc\,Sh}\,1$, on a :

110. $$\pi\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{5.4} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{9.16} + \cdots$$

En posant $\theta = \mathrm{tg}\,\frac{\tau}{2} = \mathrm{Th}\,\frac{u}{2}$, on a

111. $$\begin{cases} \dfrac{\tau}{2} = \dfrac{\theta}{1} - \dfrac{\theta^3}{3} + \dfrac{\theta^5}{5} - \dfrac{\theta^7}{7} + \cdots, \\[2ex] \dfrac{u}{2} = \dfrac{\theta}{1} + \dfrac{\theta^3}{3} + \dfrac{\theta^5}{5} + \dfrac{\theta^7}{7} + \cdots, \end{cases}$$

112. $$\pi\sqrt{2} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{6 - \cfrac{4}{5 - \cfrac{9}{14 - \cfrac{16}{9 - \cfrac{25}{22 - \ddots}}}}}}$$

113. Calculer $$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Poser $x = \mathrm{Sh}\,u$.

114. Trouver pour la chaînette la longueur de l'arc ; le rayon de courbure ; l'aire et le centre de gravité d'un segment compris entre la courbe, une ordonnée variable et les axes de coordonnées.

Ecrire l'équation de la courbe $y = m\,\mathrm{Ch}\,\frac{x}{m}$.

115. Même question pour la développante de la chaînette, ou *tractoire*.
L'équation est $x = \text{arc C h}\,\frac{1}{y} - \sqrt{1-y^2}$.

116. L'équation

$$2\beta y = \frac{1}{2}(x+2\beta)\sqrt{x^2+4\beta x} - 2\beta^2 \text{L}\,\frac{x+2\beta+\sqrt{x^2+4\beta x}}{2\beta}$$

représente la forme d'équilibre d'un fil pesant, dont la densité est en chaque point proportionnelle à la racine carrée de l'arc qui sépare ce point du point le plus bas. En posant

$$\frac{x}{2\beta}+1 = \text{C h}\,u,$$

on peut obtenir simplement :
le coefficient angulaire de la tangente en un point,
l'aire d'un segment,
le rayon de courbure en un point.

117. Rayon de courbure de la courbe représentée par l'équation

$$e^{\frac{y}{k}} \cos kx = 1.$$

(Chaîne homogène pesante, présentant partout égale chance de rupture.)

118. Trouver $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}$.

Résultat, suivant que $a - \frac{b^2}{4}$ est > 0 ou < 0 :

$$\text{arc S h}\,\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{a-\frac{b^2}{4}}}+c, \qquad \text{arc C h}\,\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}}+c.$$

(Laisant, *Essai sur les fonctions hyperboliques.*)

119. Equations des quatre premières développées des deux courbes représentées par les équations

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{2\text{C h}\,2\theta}, \\ \sin 2\omega = \dfrac{\cos 2\theta}{\text{C h}\,2\theta} + \sin 2\theta\,\text{T h}\,2\theta; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{2\text{C h}\,2\theta}, \\ \sin 2\omega = -\dfrac{\cos 2\theta}{\text{C h}\,2\theta} + \sin 2\theta\,\text{T h}\,2\theta. \end{cases}$$

On pourra aussi, en coordonnées rectangulaires, exprimer x et y en fonction du paramètre variable θ.

120. Si on considère l'hyperbole équilatère dont l'équation est

$$y^2 - x^2 = 1,$$

ou

$$\rho^2 = \frac{1}{\cos 2\omega},$$

en appelant S le secteur compris entre la courbe et les rayons vecteurs faisant avec l'axe ox les angles $\pm\,\omega$, on a

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{Th}S.$$

(D'où le nom de *fonctions hyperboliques*, faisant allusion à cette analogie du cercle avec l'hyperbole équilatère.)

CHAPITRE XV

FRACTIONS CONTINUES

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — *Développer en fraction continue la quantité* $\sqrt{a^2-1}$, *où* a *est entier.*

La partie entière est évidemment $a-1$. Posons

$$\sqrt{a^2-1} = a-1+\frac{1}{x_1},$$

d'où
$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}-(a-1)} = \frac{\sqrt{a^2-1}+(a-1)}{2(a-1)}.$$

La partie entière de x_1 est 1, soit

$$x_1 = 1+\frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{a^2-1}+(a-1)}{2(a-1)},$$

d'où
$$x_2 = \sqrt{a^2-1}+(a-1).$$

La partie entière de x_2 est $2(a-1)$; soit

$$x_2 = 2(a-1)+\frac{1}{x_3} = \sqrt{a^2-1}+(a-1),$$

alors
$$\frac{1}{x_3} = \sqrt{a^2-1}-(a-1) = \frac{1}{x_1}.$$

A partir de x_3 les quotients incomplets se reproduisent donc, et nous avons

$$\sqrt{a^2-1} = a-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2(a-1)+\ddots}}}}$$

Question II. — *Développer en fraction continue la racine positive de l'équation*

$$3x^2 - 5x - 1 = 0.$$

La racine positive de cette équation est

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{6},$$

comprise entre $\frac{11}{6}$ et $\frac{12}{6}$. Nous pouvons donc poser

$$x = 1 + \frac{1}{x_1}, \qquad \text{où} \qquad x_1 > 1.$$

Alors $$x_1 = \frac{1}{x - 1} = \frac{\sqrt{37} + 1}{6}.$$

Posons encore $$x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}, \qquad \text{où} \qquad x_2 > 1.$$

Nous avons $$x_2 = \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{\sqrt{37} + 5}{2}.$$

Nous sommes de nouveau conduits à poser

$$x_2 = 5 + \frac{1}{x_3}, \qquad \text{où} \qquad x_3 > 1,$$

d'où $$x_3 = \frac{\sqrt{37} + 5}{6} = x.$$

A partir de ce moment, les quotients incomplets se reproduisent périodiquement : $x_4 = x_1$, $x_5 = x_2$, ... Nous avons donc

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \ddots}}}}}$$

Question III. — *Déterminer p et q entiers de telle sorte que*

$$\frac{1}{100} > p\sqrt{3} - q > 0.$$

Réduisons $\sqrt{3}$ en fraction continue. Les réduites successives sont

$$1, \quad 2, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{7}{4}, \quad \frac{19}{11}, \quad \frac{26}{15}, \quad \frac{71}{41}, \quad \frac{97}{56}, \quad \frac{265}{153}.$$

On a en valeur absolue l'inégalité

$$\sqrt{3} - \frac{265}{153} < \left(\frac{1}{153}\right)^2,$$

ou

$$153\sqrt{3} - 265 < \frac{1}{153}.$$

Si donc $\frac{265}{153} < \sqrt{3}$, 153 et 265 répondent à la question. Il en est ainsi, en effet, puisque $\frac{265}{153}$ est une réduite d'ordre impair. Donc

$$p = 153, \qquad q = 265$$

sont les plus petits entiers répondant à la question.

Question IV. — *Résoudre l'équation* $10^x = 3$.

x est compris entre 0 et 1. Posons $x = \frac{1}{y}$, où $y > 1$. Alors

$$3^y = 10$$

et on voit que y est compris entre 2 et 3. Soit

$$y = 2 + \frac{1}{z},$$

d'où

$$10 = 3^{2+\frac{1}{z}}$$

et

$$\left(\frac{10}{9}\right)^z = 3.$$

z est compris entre 10 et 11, et ainsi de suite. On a donc

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

ce qui permettra de trouver une valeur de x aussi approchée que l'on voudra, x étant compris entre deux réduites consécutives quelconques. Ici les réduites sont

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{10}{21}, \quad \frac{21}{44}, \quad \ldots$$

(REYNAUD, *Algèbre.*)

Question V. — APPLICATION DES FRACTIONS CONTINUES A LA THÉORIE DES HORLOGES.

« *Rouage*, système de roues dentées et de pignons destiné à trans-

mettre le mouvement de rotation d'un axe à un autre, de telle sorte que le rapport des vitesses angulaires reste constant. Le plus ordinairement les axes extrêmes et intermédiaires sont parallèles. Une roue A engrène avec le pignon b d'une roue B ; celle-ci engrène avec le pignon c d'une roue C ; cette dernière engrène à son tour avec le pignon d d'une roue D, et ainsi de suite. C'est la disposition la plus commune. »

. . . . . .

Soient N, N', N'' les nombres de dents des roues A, B, C, et n, n', n'' les nombres d'ailes des pignons b, c, d ; si T et T''' représentent les temps employés par les roues extrêmes pour faire un tour, nous admettrons qu'on ait démontré la relation

$$\frac{T}{T'''} = \frac{N.N'.N''}{n\ n'.n''}.$$

« Lorsqu'on veut que les temps employés à faire un nombre donné de tours soient dans un rapport donné $\frac{p}{q}$, on a à satisfaire à une relation de la forme

$$\frac{n.n'.n''}{N.N'.N''} = \frac{p}{q};$$

ce qui peut se faire généralement d'une infinité de manières. Supposons d'abord que les nombres p et q soient décomposables en autant de facteurs qu'il y a de pignons, de telle sorte qu'on ait

$$p = \alpha.\alpha'.\alpha'' \qquad \text{et} \qquad q = \beta.\beta'.\beta''.$$

Il est clair qu'on satisfera à la relation précédente en prenant

$$n = \alpha, \qquad n' = \alpha', \qquad n'' = \alpha'',$$

avec

$$N = \beta, \qquad N' = \beta', \qquad N'' = \beta''.$$

Il suffira que les nombres α, α', α'' puissent convenir à des pignons, et ne soient par conséquent pas trop élevés. Si, par exemple,

$$p = 360 \qquad \text{et} \qquad q = 5400,$$

on pourra écrire

$$p = 6.6.10 \qquad \text{et} \qquad q = 15.18.20,$$

et prendre en conséquence

$$n = 6, \qquad n' = 6, \qquad n'' = 10,$$

$$N = 15, \qquad N' = 18, \qquad N'' = 20.$$

Si les nombres p et q étaient trop petits pour fournir le nombre des facteurs convenables, on pourrait les multiplier par un même nombre convenablement choisi. Soit, par exemple,

$$p = 49 \qquad \text{et} \qquad q = 1020;$$

en multipliant par 6, on pourra prendre

$$p = 7.7.6 \qquad \text{et} \qquad q = 1020.6 = 17.18.20,$$

d'où $\quad n = 7, \quad n' = 7, \quad n'' = 6,$

avec $\quad N = 17, \quad N' = 18, \quad N'' = 20.$

On opérerait d'une manière analogue, quel que soit le nombre des roues et pignons composant le rouage. »

« Lorsque l'un des nombres p ou q est premier et trop grand pour qu'on ait la ressource d'introduire des facteurs, on se contente d'une approximation, et on remplace la fraction $\frac{p}{q}$ par une fraction plus simple, qui en diffère peu, et dont les termes soient décomposables en facteurs. Un moyen naturel de trouver cette fraction approchée est de réduire $\frac{p}{q}$ en fraction continue et de former les réduites successives. On sait que ces réduites jouissent de cette propriété que chacune d'elles approche plus de la fraction proposée que toute autre fraction exprimée en termes plus simples. Supposons, par exemple, que le rapport donné soit celui de $2^j\frac{1}{2}$ à $29^j 12^h 44^m$, qui est à peu près l'intervalle de temps entre deux retours consécutifs d'une même phase de la lune. En convertissant ces nombres en minutes, on trouve

$$3600^m \qquad \text{et} \qquad 42524^m,$$

ou, en divisant par 4,

$$p = 900 \qquad \text{et} \qquad q = 10\,631.$$

Comme ce dernier nombre est premier, on convertira la fraction $\frac{900}{10\,631}$ en fraction continue, et l'on trouvera pour les réduites successives

$$\frac{1}{11}, \quad \frac{1}{12}, \quad \frac{5}{59}, \quad \frac{16}{189}, \quad \frac{213}{2516}, \quad \frac{229}{2705}, \quad \frac{900}{10.631}.$$

On peut prendre $\frac{16}{189}$, ou, en multipliant les deux termes par 24, par exemple

$$p = 16.24 = 6.8.8 \qquad \text{et} \qquad q = 189.24 = 12.18.21\,;$$

on aura donc

$$n = 6, \quad n' = 8, \quad n'' = 8,$$

avec $\quad N = 12, \quad N' = 18, \quad N'' = 21$ ».

« On remarque aisément que deux pignons auraient suffi dans ce cas, car, si l'on se contente de multiplier par 3 les deux termes de la frac-

tion $\frac{16}{189}$, on peut prendre

$$p = 16.3 = 6.8 \qquad \text{et} \qquad q = 189.3 = 21.27,$$

d'où $\qquad n = 6, \qquad n' = 8,$

avec $\qquad N = 21, \qquad N' = 27.$ »

« Quant à l'erreur commise, en substituant $\frac{16}{189}$ à la fraction proposée, on l'appréciera en posant

$$\frac{16}{189} = \frac{900}{10631 + z},$$

d'où l'on tire $\qquad z = 0{,}25,$

et par conséquent

$$\frac{16}{189} = \frac{900}{10631{,}25} = \frac{3600}{42525},$$

au lieu de $\qquad \frac{3600}{42524}.$

A chaque révolution de la dernière roue, c'est-à-dire à chaque retour de la même phase l'erreur serait donc de 1 minute. »

« Un autre moyen consiste à déterminer une fraction $\frac{x}{y}$ telle, que le numérateur de la différence entre cette fraction et la proposée soit très petit par rapport au dénominateur, c'est-à-dire que l'on pose

$$\frac{p}{q} - \frac{x}{y} = \frac{\alpha}{qy},$$

α étant un nombre entier très petit par rapport à qy. On a donc à résoudre en nombres entiers l'équation indéterminée

$$py - qx = \alpha,$$

et l'on choisit la solution qui donne pour x et y les nombres les plus commodément décomposables en facteurs. Dans l'exemple de tout à l'heure, on aurait à résoudre l'équation

$$900y - 10\,631x = \alpha \text{ ».}$$

« En prenant $\qquad x = 703 \qquad$ et $\qquad y = 8\,304,$

on trouve $\qquad \alpha = 7,$

nombre très petit, en effet, par rapport à

$$10631.y \qquad \text{ou à} \qquad 88279824.$$

On a d'ailleurs

$$703 = 19.37 \qquad \text{et} \qquad 8304 = 48\ 173 \text{ ».}$$

« On résoudrait donc la question avec deux pignons seulement, en

posant

$$N = 48, \qquad N' = 173\,; \qquad \text{et} \qquad n = 19, \qquad n' = 37\,;$$

dans ce cas les pignons deviendraient de véritables roues. Quant à l'erreur commise, on l'obtiendrait en posant

$$\frac{703}{8304} = \frac{3600}{42524 + z},$$

d'où

$$z = 0',04$$

ou 2",4 par révolution de la dernière roue, ce qui revient à 30" par an. »

« Supposons, comme second exemple, que le rapport des vitesses des roues extrêmes doive être celui du jour sidéral au jour moyen, ou celui de 24^h à $23^h56'4'',0906$. En convertissant ces nombres en secondes et négligeant les centièmes, on obtient

$$86400'' \qquad \text{et} \qquad 86164''\,;$$

et, en divisant par 4, on peut poser

$$p = 21600 \qquad \text{et} \qquad q = 21541.$$

On aura donc à résoudre l'équation

$$21541x - 21600y = \alpha \text{ ».}$$

« Les valeurs générales de x et de y qui satisfont à cette équation sont

$$x = 3661\alpha + 21600.t,$$

$$y = 3651\alpha + 21541.t.$$

Parmi les valeurs entières qu'on peut donner à α et à t, on peut distinguer

$$\alpha = -216 \qquad \text{et} \qquad t = 37,$$

qui donnent

$$x = 8424 \qquad \text{et} \qquad y = 8401.$$

Or

$$8424 = 39.216 \qquad \text{et} \qquad 8401 = 31.271\,;$$

on résoudra donc le problème en prenant

$$n = 39, \qquad n' = 31 \qquad \text{et} \qquad N = 271, \qquad N' = 216. \text{ »}$$

« En calculant comme plus haut l'erreur commise, on trouve 0",012 de trop par jour sidéral, ce qui revient à 4",4 par an. »

« On aurait pu prendre

$$\alpha = -41 \qquad \text{avec} \qquad t = 7,$$

ce qui donne

$$x = 1099 \qquad \text{et} \qquad y = 1096.$$

Or

$$1099 = 7 \times 157 \qquad \text{et} \qquad 1096 = 8 \times 137,$$

on aurait donc une autre solution du problème en prenant

$$n = 8, \qquad n' = 7 \qquad \text{avec} \qquad N = 137, \qquad N' = 157.$$

L'erreur est alors de 0",0586 par jour sidéral, soit 21",389 par an. »

(SONNET, *Dictionnaire des Mathématiques appliquées*, p. 1211-1213.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1. Développer $\sqrt{18}$ en fraction continue. (CATALDI, à qui Libri attribue l'invention des fractions continues, dans les premières années du XVIIe siècle.)

2. On a

$$\sqrt{a^2+a} = a + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2a + \cdots}}}}$$

3. Et de même

$$\sqrt{a^2+2a} = a + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2a + \cdots}}}}$$

Trouver les valeurs des fractions suivantes :

4. $$1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cdots}}}$$

5. $$-1 + \cfrac{6}{-1 + \cfrac{6}{-1 + \cfrac{6}{-1 + \cdots}}}$$

6. $$\cfrac{a}{1 - \cfrac{b}{1 - \cfrac{a}{1 - \cfrac{b}{1 - \cdots}}}}$$

(CATALAN.)

7. Trouver les réduites de la fraction

$$1 + \cfrac{1}{-x + \cfrac{1}{-x + \cfrac{1}{-x + \cdots}}}$$

8. De la formule

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

déduire

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \ddots}}}$$

9. De la formule

$$L2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots,$$

déduire

$$L2 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{1 + \ddots}}}}}$$

10. Résoudre en nombres entiers les équations

$$5y = 80h + 90,$$
$$5y = 80h + 12.$$

(ROLLE.)

11. Démontrer que

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1.3}}{\cfrac{}{1 + \cfrac{4}{3.5}}}{\cfrac{}{1 + \cfrac{9}{5.7}}}{\cfrac{}{1 + \cfrac{16}{7\ 9}}}{\cfrac{}{1 + \cfrac{25}{9.11}}}{\cfrac{}{1 + \ddots}}$$

12. Partager 100 livres entre 100 personnes, hommes, femmes et enfants, en donnant 2 livres aux hommes, 1 aux femmes et 10 sous aux enfants.

(*Encyclopédie.*)

Soit la fonction

$$\varphi(z) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z(z+1)} + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{a^3}{z(z+1)(z+2)} + \cdots,$$

dont le terme général est

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{a^n}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n-1)}.$$

13. Démontrer que

$$\frac{\varphi(z)}{\varphi(z+1)} = \frac{a}{z(z+1)} \varphi(z+2).$$

14. On pose

$$\psi(z) = \frac{a}{z}\,\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)},$$

démontrer que

$$\psi(z) = \cfrac{a}{z + \cfrac{a}{z+1 + \cfrac{a}{z+2 + \ddots}}}$$

15. En déduire, pour $z = \frac{1}{2}$,

$$\frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}} = \cfrac{2a}{1 + \cfrac{4a}{3 + \cfrac{4a}{5 + \cfrac{4a}{7 + \ddots}}}}$$

Déduire de là le développement en fractions continues des fonctions suivantes :

16. $$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

17. $$\operatorname{tg} x,$$

18. $$\frac{e-1}{2}.$$

Pour les six derniers exercices, voyez LEGENDRE, *Eléments de Géométrie*, 14e édition, note IV, p. 289 ; LEGENDRE, *Exercices de calcul intégral*, tome II, p. 540 ; EULER, trad. Labey, *Introd. à l'Analyse infinitésimale*, tome I, p. 362 ; BERTRAND, *Traité de Calcul intégral*, différentiel p. 439.

Le dernier développement constitue la formule la plus avantageuse pour le calcul de e.

Lorsqu'une équation du troisième degré privée de second terme a ses trois racines réelles, on sait que le coefficient de x est négatif ; on peut d'ailleurs toujours supposer négatif le terme indépendant et écrire l'équation ainsi :

$$x^3 - px - q = 0.$$

19. 1° Démontrer que deux des racines x' et x'' s'expriment par les formules

$$x' = \cfrac{\sqrt{p + \cfrac{q}{\sqrt{p + \cfrac{q}{\sqrt{p + \ddots}}}}}}{}, \qquad x'' = \cfrac{-\sqrt{p - \cfrac{q}{\sqrt{p - \cfrac{q}{\sqrt{p - \ddots}}}}}}{}.$$

20. 2° Quand on calcule x' par la formule précédente, les valeurs sont successivement approchées par excès ou par défaut. ε_n étant l'erreur commise après n opérations, on a

$$\varepsilon_n < \frac{q}{2p}\left(\frac{q}{2p\sqrt{p}}\right)^{n-1}.$$

21. 3° La méthode s'applique au calcul de la racine positive, quand même l'équation n'aurait pas ses trois racines réelles, à condition toutefois que

$$q^2 < 4p^3.$$

(A. Hermann.)

CHAPITRE XVI

MÉTHODES D'APPROXIMATION. — THÉORIE DES DIFFÉRENCES. FORMULES D'INTERPOLATION

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — *Trouver le polynome en x de moindre degré qui prend les valeurs* 1, 2, 3, 4 *quand on donne à x les valeurs* -1, 0, 2 *et* 3.

En appliquant la formule d'interpolation de Lagrange, on voit que le polynome cherché a pour expression

$$f(x)=\left\{\begin{array}{l} 1\,\dfrac{x(x-2)(x-3)}{(-1)(-1-2)(-1-3)}+2\,\dfrac{(x+1)(x-2)(x-3)}{1(-2)(-3)} \\ +3\,\dfrac{(x+1)x(x-3)}{(2+1)2(2-3)}+4\,\dfrac{(x+1)x(x-2)}{(3+1)3(3-2)}=\dfrac{x^3-3x^2+8x+24}{12}. \end{array}\right.$$

Question II. — Une identité algébrique.

« Soit $f(x)=0$ une équation algébrique dont le premier membre est un polynome entier, et qui admet pour racines n valeurs distinctes $a, b, \ldots, l$.

« On a

$$(1)\qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\cdots+\frac{1}{x-l}=\sum\frac{1}{x-a}.$$

« De là

$$(2)\quad \frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi(x)}{f'(x)}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\left(\dfrac{\varphi(x)}{f'(x)}\right)}{x-a}+\frac{\left(\dfrac{\varphi(x)}{f'(x)}\right)}{x-b}+\cdots+\frac{\left(\dfrac{\varphi(x)}{f'(x)}\right)}{x-l}.$$

« On sait d'autre part que $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, si $\varphi(x)$ est une fonction entière de degré inférieur à celui de $f(x)$, peut se décomposer sous la forme suivante :

$$(3) \qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{L}{x-l}.$$

« En divisant l'une par l'autre les relations (3), (1), on a

$$(4) \qquad \frac{\varphi(x)}{f'(x)} = \frac{\dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \cdots + \dfrac{L}{x-l}}{\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \cdots + \dfrac{1}{x-l}},$$

formule qui permet d'avoir tous les coefficients A, B, ..., L en y faisant successivement $x = a, b, \ldots, l$:

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \qquad B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \qquad \ldots, \qquad L = \frac{\varphi(l)}{f'(l)}.$$

« Ces résultats sont du reste bien connus.

« L'identité (3) prend donc la forme

$$(5) \qquad \frac{\varphi(x)}{f'(x)} = \frac{\left(\dfrac{\varphi(a)}{f'(a)}\right)}{x-a} + \frac{\left(\dfrac{\varphi(b)}{f'(b)}\right)}{x-b} + \cdots + \frac{\left(\dfrac{\varphi(l)}{f'(l)}\right)}{x-l}.$$

« Si nous retranchons les relations (2), (5) l'une de l'autre, il vient

$$(6) \qquad \sum \left(\frac{\dfrac{\varphi(x)}{f'(x)} - \dfrac{\varphi(a)}{f'(a)}}{x-a} \right) = 0,$$

et il ne me semble pas que cette identité, pourtant bien simple, ait été remarquée jusqu'ici.

« Elle permet de résoudre cette question :

« *Étant données n quantités a, b, ..., l, trouver une fonction rationnelle* F(x) *telle qu'on ait identiquement*

$$\sum \frac{F(x) - F(a)}{x-a} = 0;$$

et elle montre que le problème admet une infinité de solutions, lesquelles s'obtiennent en posant

$$f(x) = (x-a)(x-b) \ldots (x-l),$$

et en écrivant

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{f'(x)},$$

$\varphi(x)$ étant une fonction entière arbitraire de x, dont le degré est au plus $n-1$. »

(LAISANT, *Revue de Mathématiques Spéciales*, mars 1894.)

Question III. — « NOUVELLES REMARQUES SUR LE PROBLÈME DE L'INTERPOLATION. »

« Soit à déterminer une fonction linéaire et homogène u de n variables $r, s, t, \ldots, w$, connaissant n valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de la fonction, correspondant à n systèmes donnés de valeurs des variables, que nous représenterons par les mêmes indices. Nous pouvons écrire

$$(1) \qquad u = a_1 r + a_2 s + a_3 t + \cdots + a_n w,$$

ou

$$u - a_1 r - a_2 s - a_3 t - \ldots - a_n w = 0.$$

« Cette égalité devant être vérifiée pour tous les systèmes donnés, il s'ensuit que si nous appelons maintenant $u, r, s, \ldots, w$ un système particulier quelconque de la fonction et des variables, autre que les systèmes donnés, nous devrons avoir

$$\begin{aligned} u - a_1 r - a_2 s - \cdots - a_n w &= 0, \\ u_1 - a_1 r_1 - a_2 s_1 - \cdots - a_n w_1 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_n - a_1 r_n - a_2 s_n - \cdots - a_n w_n &= 0. \end{aligned}$$

« Si dans ce système d'équations nous regardons $a_1, a_2, \ldots, a_n$ comme des inconnues, nous voyons qu'il en résulte l'identité

$$(2) \qquad D = \begin{vmatrix} u & r & s & t & \ldots & w \\ u_1 & r_1 & s_1 & t_1 & \ldots & w_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & r_n & s_n & t_n & \ldots & w_n \end{vmatrix} = 0.$$

« Posons

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} r_1 & s_1 & t_1 & \ldots & w_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 & \ldots & w_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_n & s_n & t_n & \ldots & w_n \end{vmatrix} = \Delta,$$

puis désignons par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ les déterminants obtenus en supprimant les indices dans la première, la deuxième, ..., la n^e ligne de Δ; et par $\Delta_r, \Delta_s, \ldots, \Delta_w$ les déterminants obtenus en remplaçant dans la première, la deuxième, ..., la n^e colonne, les éléments par la lettre u affectée des mêmes indices.

« Il est aisé de voir qu'en développant D suivant les éléments de sa première ligne, et de sa première colonne, nous aurons les deux formes suivantes pour la relation (2) :

$$(4) \qquad u\Delta = r\Delta_r + s\Delta_s + \cdots + w\Delta_w,$$

$$(5) \qquad u\Delta = u_1\Delta_1 + u_2\Delta_2 + \cdots + u_n\Delta_n.$$

« Les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne sont donc autres que $\frac{\Delta_r}{\Delta}, \frac{\Delta_s}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_w}{\Delta}$, ce qui est pour ainsi dire évident; mais en outre la formule (5) nous donne la valeur de la fonction cherchée sous forme linéaire homogène par rapport à $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

« Les coefficients $\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta}$ sont, bien entendu, des fonctions linéaires homogènes des variables. Mais rien ne particularisant celles-ci, on peut les supposer liées entre elles comme on le voudra.

« Si par exemple on les remplace par les puissances successives $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ d'une seule variable nouvelle, on remarquera immédiatement que la formule (5) devient identiquement la formule d'interpolation de Lagrange.

« Au lieu de cela, il est possible de supposer que u a une forme entière donnée comme l'on voudra, par rapport à plusieurs variables, $x, y, z, \ldots$, chacune d'elles figurant ainsi dans des termes déterminés avec des degrés déterminés. Du moment où le polynome ainsi donné a n termes, l'interpolation est déterminée par n systèmes de valeurs de la fonction et des variables. »

(LAISANT, *Ass. fr.*, Congrès de Marseille, 1891.)

Question IV. — MÉTHODE D'APPROXIMATION DE LAGRANGE.

Expliquons cette méthode sur un exemple, dans le seul cas où l'équation proposée a une seule racine comprise entre deux entiers consécutifs. (On peut d'ailleurs toujours se ramener à ce cas.)

Soit l'équation

$$f(x) = x^3 - 8x + 6 = 0,$$

qui a une racine entre -4 et -3, une autre entre 0 et 1, une enfin entre 2 et 3. Pour calculer cette dernière, posons

$$x = 2 + \frac{1}{y}.$$

L'équation f devient

$$\varphi(y) = 2y^3 - 4y^2 - 6y - 1 = 0$$

et on est assuré que cette équation φ a une seule racine y supérieure à 1. Une limite supérieure des racines est $1+\frac{6}{2}$, et y est compris entre 3 et 4.

Posons

$$y = 3 + \frac{1}{z}.$$

L'équation φ devient

$$\psi(z) = z^3 - 24z^2 - 14z - 2 = 0.$$

La limite supérieure des racines est 25 ; d'autre part $\psi(24) < 0$, ce qui se voit en écrivant

$$\psi(z) = z^2(z - 24) - 14z - 2,$$

ainsi la racine z supérieure à 1 est comprise entre 24 et 25.

Posons

$$z = 24 + \frac{1}{t},$$

ce qui donne

$$\chi(t) = 338\,t^3 - 562\,t^2 - 48\,t - 1 = 0.$$

Une limite supérieure des racines est $1 + \frac{562}{338} < 3$; or $\chi(2) > 0$, donc $t = \frac{1}{u}$. On trouve encore $u = 1 + \frac{1}{v}$, etc. Ainsi

$$x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{24 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

Les réduites sont

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{170}{73}, \quad \frac{177}{76}, \quad \frac{347}{149}.$$

Cette dernière réduite est approchée par défaut. L'erreur commise en la prenant pour valeur de x est inférieure à

$$\frac{1}{149.(149 + 76)} = \frac{1}{33525}.$$

En convertissant la dernière réduite en fraction décimale, il vient en *forçant* la quatrième décimale

$$x_1 = 2{,}3289.$$

Cette valeur est-elle approchée par défaut ou par excès ? Nous avons

$$x = \frac{347}{149} + \alpha, \qquad \alpha < \frac{1}{33525}.$$

Ensuite

$$\frac{347}{149} = 2{,}3289 - \beta, \qquad \beta = \frac{61}{1490000}.$$

Donc

$$x = 2{,}3289 + \alpha - \beta,$$

ou

$$\alpha - \beta < \frac{1}{33525} - \frac{61}{1490000} < 0.$$

Donc x_1 est une valeur approchée par excès : le nombre x cherché est compris entre 2,3288 et 2,3289.

(FINCK, *Système d'algèbre élémentaire*, p. 439.)

Question V. — « *Calcul à* $\frac{1}{10^n}$ *près des racines incommensurables d'une équation numérique dont toutes les racines sont réelles* ».

« 1. *Calcul de la plus grande racine positive.* — Soit l'équation $f(x) = 0$, dont toutes les racines sont réelles.

« Si λ_1 est la limite supérieure de ses racines positives calculée par la *méthode de Newton*, $\lambda_1 - 1$ est la partie entière α de la plus grande racine positive A.

« L'équation

$$\varphi(y) = f(y + \alpha) = 0$$

n'a qu'une racine positive égale à $A - \alpha$, et la racine positive de l'équation

$$\psi(z) = \varphi\left(\frac{z}{10}\right) = 0$$

a pour partie entière le chiffre β des dixièmes de A écrite sous forme décimale. Si λ_2 est le plus petit nombre entier rendant $\psi(z)$ positif, $\beta = \lambda_2 - 1$.

« L'équation

$$\chi(t) = \psi(z + \beta) = 0$$

n'a qu'une racine positive dont la partie entière est nulle et dont le chiffre des dixièmes est le chiffre des centièmes γ de A.

« γ sera donc le chiffre des unités simples de la racine positive de l'équation

$$\xi(u) = \chi\left(\frac{u}{10}\right) = 0$$

et s'obtiendra en diminuant de l'unité le plus petit nombre entier qui rend $\xi(u)$ positif.

« On calculera ainsi successivement les chiffres des différentes unités décimales qui entrent dans A.

« Remarque. — En prenant la partie entière de la racine positive de l'équation

$$\psi_1(z_1) = \varphi\left(\frac{z_1}{10^m}\right) = 0,$$

on aurait le nombre formé par l'ensemble des m premiers chiffres décimaux de A ; mais, pratiquement, ce nombre serait difficile à trouver. Il faut opérer comme nous l'avons indiqué.

« 2. *Calcul de la plus petite racine positive.* — Si a est la plus petite racine positive de $f(x) = 0$, et A_1 la plus grande racine positive de

$$f_1(x_1) = f\left(\frac{1}{z_1}\right) = 0,$$

on a $a = \frac{1}{A_1}$, et si l'on veut a avec p chiffres exacts, par défaut, on calculera A_1 avec $p+1$ chiffres exacts par excès.

« 3. *Calcul d'une racine positive quelconque.* — Soit ρ la plus petite racine de l'équation $f(x) = 0$ supérieure au nombre positif p.

« $\rho - p$ sera la plus petite racine positive de l'équation

$$\xi(w) = f(w+p) = 0.$$

« La connaissance de cette racine conduira à la valeur de ρ.

« 4. *Calcul des racines négatives.* — On calculera les racines positives de la transformée en $-x$, et l'on affectera les racines trouvées du signe — ».

(C. Margerie, *Nouvelles Annales*, janvier 1884.)

QUESTIONS PROPOSÉES

PROBLÈMES RELATIFS AU CALCUL DES ANNUITÉS

1. *Annuité constante ou annuité linéaire parallèle.* — A étant le capital ou la dette contractée, remboursable par n payements égaux annuels ou annuités, a l'annuité, r l'intérêt rapporté par 1 franc en un an, on a la relation

$$(1) \qquad A(1+r)^n = a\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

2. *Annuité augmentant ou diminuant uniformément ou annuité linéaire oblique.* — a étant le premier payement, b sa variation annuelle, positive ou néga-

tive, on a

$$(2)\qquad A(1+r)^n = a\frac{(1+r)^n-1}{r} + b\frac{(1+r)^n-(1+nr)}{r^2}.$$

3. *Rentes viagères.* — v étant le nombre des vivants à un âge déterminé, d le nombre annuel des décès supposé constant, a la rente viagère à laquelle donne droit le capital A, versé au commencement de l'entreprise, on a

$$(3)\qquad \frac{v}{a}A(1+r)^n = (v-d)\frac{(1+r)^n-1}{r} - d\frac{(1+r)^n-(1+nr)}{r^2}.$$

y étant l'annuité considérée comme fonction du temps x écoulé depuis l'époque de l'emprunt, on a, pour l'annuité linéaire oblique

$$(4)\qquad y = a + b(x-1),$$

équation d'une droite, qui devient parallèle à Ox pour $b=0$, autrement dit dans le cas de l'annuité linéaire parallèle.

4. *Annuité uniformément variée ou annuité parabolique.* — L'annuité uniformément variée est représentée par l'équation

$$(5)\qquad y = a + b(x-1) + c(x-1)(x-2).$$

On a ici la relation

$$A(1+r)^n = a\frac{(1+r)^n-1}{r} + b\frac{(1+r)^n-1-nr}{r^2}$$
$$+ c[1.2(1+r)^{n-3} + 2.3(1+r)^{n-4} + 3.4(1-r)^{n-5} + \ldots$$
$$+ (n-3)(n-2)(1+r) + (n-2)(n-1)],$$

c'est-à-dire

$$(6)\qquad A(1+r)^n = a\frac{(1+r)^n-1}{r} + b\frac{(1+r)^n-1-nr}{r^2}$$
$$+ 1.2\,c\frac{(1+r)^n-1-nr-\frac{n(n-1)}{1.2}r^2}{r^3}.$$

Etant donnés A, r et n, cette équation (6) renferme trois paramètres a, b, c. Il est clair alors qu'on pourra par exemple fixer les deux payements extrêmes, ou se donner une relation entre eux et en même temps le payement maximum, etc. Il est aisé de déterminer le payement maximum ou les payements maxima.

5. *Annuité suivant une loi algébrique entière.* — Avec les mêmes notations, si y et x sont liés par la relation

$$(7)\qquad y = a + b(x-1) + c(x-1)(x-2) + \cdots + g(x-1)(x-2)\ldots(x-m),$$

on a

$$(8)\qquad A(1+r)^n = a\frac{(1+r)^n-1}{r} + b\frac{(1+r)^n-1-nr}{r^2} + \cdots$$
$$+ m!\,g\frac{(1+r)^n-1-nr-\cdots-\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}r^m}{r^{m+1}}.$$

6. *Cas où l'on donne explicitement les payements successifs.* — Soient y_0,

$y_1, \ldots, y_{m-1}$ les valeurs de y fournies par la formule (7), quand on y donne à x les valeurs $1, 2, \ldots, m$. Dans ce cas la courbe des payements a pour équation

$$(9) \quad y = y_0 + \frac{x-1}{1}\Delta y_0 + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}\Delta_2 y_0 + \cdots + \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-m)}{m!}\Delta_m y_0,$$

qui sera déterminée si on lui donne m points communs avec une courbe arbitraire, le dernier étant fixé par la relation (8).

Examiner en particulier le cas de $m = n - 1$.

7. L'équation (8) devient dans l'hypothèse de l'exercice (6)

$$(8)\,bis \quad A(1+r)^n = y_0\frac{(1+r)^n - 1}{r} + \Delta y_0 \frac{(1+r)^n - 1 - nr}{r^2} + \cdots + \Delta_m y_0 \frac{(1+r)^n - 1 - nr - \cdots - \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}r^m}{r^{m+1}}.$$

8. On a aussi en posant $m = n - 1$,

$$(10) \quad A = \frac{y_0}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] + \frac{\Delta y_0}{r}\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^{n-1}}}{1+r}\right] + \frac{\Delta y_1}{r}\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^{n-2}}}{(1+r)^2}\right] + \cdots + \frac{\Delta y_{n-2}}{r}\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^1}}{(1+r)^{n-1}}\right].$$

9. *Application numérique.* — Soit

$$y = a + b(x-1) + c(x-1)(x-2) + d(x-1)(x-2)(x-3),$$

avec $\quad n = 15, \quad r = 0{,}08, \quad A = 120.$

On assujettit la courbe à passer par un premier payement minimum pour $x = 1$, par un dernier maximum pour $x = 15$, et on veut que le dernier payement soit double du premier. Calculer les quinze payements successifs.

On trouve

10,131	16,274
10,279	17,298
10,691	18,253
11,327	19,065
12,140	19,700
13,084	20,114
14,118	20,262.
15,196	

10. *Annuités variables périodiquement.* — Soit le système des p payements consécutifs

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{p-1},$$

formant une des périodes que l'on suppose se succéder en nombre n, en sorte qu'il y a np annuités. Soit

$$Y_p(1+r)^p = y_0(1+r)^{p-1} + y_1(1+r)^{p-2} + \cdots + y_{p-2}(1+r) + y_{p-1}.$$

En représentant par $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ les valeurs successives que prend Y_p dans la 1re, la 2e, ..., la $n^{ième}$ période, on a

$$(11)\quad \frac{A(1+r)^{np}}{(1+r)^p} = Y_0\frac{(1+r)^{np}-1}{(1+r)^p-1} + \Delta Y_0\frac{(1+r)^{np}-1-n[(1+r)^p-1]}{[(1+r)^p-1]^2}$$
$$+\Delta_2 Y_0\frac{(1+r)^{np}-1-n[(1+r)^p-1]-\frac{n(n-1)}{1.2}[(1+r)^p-1]^2}{[(1+r)^p-1]^3}+\cdots$$

11. *Cas d'échéances survenant à des époques équidistantes et qui se succèdent à des intervalles égaux à une partie aliquote* $\frac{1}{\mu}$ *de l'année prise pour unité, le taux étant réduit lui-même à* $\frac{r}{\mu}$ *ou à la même partie aliquote du taux annuel.*

On a dans ce cas entre y et x la relation

$$(12)\quad y = a + b\left(x-\frac{1}{\mu}\right) + c\left(x-\frac{1}{\mu}\right)\left(x-\frac{2}{\mu}\right)+\cdots$$
$$+g\left(x-\frac{1}{\mu}\right)\left(x-\frac{2}{\mu}\right)\cdot\cdots\cdot\left(x-\frac{m}{\mu}\right).$$

L'équation d'acquittement devient ici

$$(13)\quad A\left(1+\frac{r}{\mu}\right)^{n\mu} = y_0\frac{\left(1+\frac{r}{\mu}\right)^{n\mu}-1}{\frac{r}{\mu}} + \Delta y_0\frac{\left(1+\frac{r}{\mu}\right)^{n\mu}-1-nr}{\frac{r^2}{\mu^2}}$$
$$+\Delta_2 y_0\frac{\left(1+\frac{r}{\mu}\right)^{n\mu}-1-nr-\frac{n\mu(n\mu-1)}{1.2}\frac{r^2}{\mu^2}}{\frac{r^3}{\mu^3}}+\cdots$$

12. Si μ augmente indéfiniment, en posant $\frac{1}{\mu} = dx$, la formule (13) devient

$$(14)\quad Ae^{nr}dx = y_0\frac{e^{nr}-1}{r} + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0\frac{e^{nr}-1-nr}{r^2}$$
$$+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0\frac{e^{nr}-1-nr-\frac{n^2r^2}{1.2}}{r^3}+\cdots$$

L'équation (12) devient ici

$$(15)\quad y = y_0 + \frac{x}{1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \frac{x^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0+\cdots$$

La formule (14) peut encore s'écrire

$$(16)\quad Ae^{nr}dx = ny_0 + \frac{n^2}{1.2}\left[ry_0+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0\right]$$
$$+\frac{n^3}{1.2.3}\left[r^2y_0+r\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0\right]+\cdots$$

Pour $n = \infty$, (14) devient

$$(17) \qquad A dx = \frac{1}{r} y_0 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{1}{r^3}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \cdots$$

(Ici y_0 est infiniment petit du premier ordre).

Enfin, si on capitalise au bout du temps $\frac{1}{\mu}$, il faut, dans (13) et (14), remplacer r par

$$\left(1 + \frac{r}{\mu}\right)^{\mu} - 1.$$

13. *Somme absolue des versements.* — Il suffit pour l'obtenir de faire $r = 0$ dans (8) ou (8) *bis*.

En particulier, si l'on suppose le taux infiniment petit, de (16) on tire

$$S\, dx = \int_0^n y\, dx,$$

résultat à prévoir.

Les formules et calculs qui précèdent sont extraits de la brochure du Dr H. Lecocq : « *Des annuités variables en fonction du temps* », reproduction d'articles du « *Journal des Actuaires français* », 1873 et 1874.

---

14. On sait que le volume d'un segment sphérique est une fonction du troisième degré de sa hauteur : déterminer cette fonction.

(Cirodde.)

15. Déterminer la fonction $u = ax^2 + by + c$, au moyen des trois systèmes donnés x_1, y_1, u_1 ; x_2, y_2, u_2 ; x_3, y_3, u_3. (Voir question III.)

On comparera le résultat, de la forme

$$Z_1 u_1 + Z_2 u_2 + Z_3 u_3,$$

à celui que donnerait la formule de Lagrange.

16. Pour obtenir un résultat plus général, il suffira d'écrire

$$\varphi[Z_1\varphi^{-1}(u_1) + Z_2\varphi^{-1}(u_2) + \cdots + Z_n\varphi^{-1}(u_n)],$$

où φ est la caractéristique d'une fonction arbitraire et φ^{-1} celle de la fonction inverse.

(Laisant.)

17. Etablir la formule

$$m! = (h+m)^m - C_m^1(h+m-1)^m + C_m^2(h+m-2)^m - \cdots$$
$$+ (-1)^{m-1}C_m^{m-1}(h+1)^m + (-1)^m C_m^m h^m,$$

où m et h sont deux entiers quelconques.

On appliquera à la suite

$$h^m,\ (h+1)^m,\ (h+2)^m,\ \ldots,\ (h+m)^m,$$

la formule qui donne la différence *mième* d'un terme d'une suite, en fonction de ce terme et des m suivants.

(G. de Longchamps : *Algèbre.*)

Examiner le cas de $h = 0$.

(Picquet : *Examens oraux.*)

18. On représente par x_1, y_1 ; x_2, y_2 ; .... ; x_m, y_m, les coordonnées de points d'intersection des deux courbes algébriques dont les équations, mises sous forme entière, sont

$$f(x,y) = 0, \qquad F(x,y) = 0.$$

On suppose que ces points d'intersection sont *simples et situés à distance finie.*

1° Montrer que pour chaque valeur de i on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x - x_i)a_i(x,y) + (y - y_i)b_i(x,y), \\ F(x,y) &= (x - x_i)A_i(x,y) + (y - y_i)B_i(x,y), \end{aligned} \qquad i = \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{matrix} \right.$$

les coefficients a_i, b_i ; A_i, B_i étant des polynomes en x, y.

2° On pose

$$\varphi_i(x,y) = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ A_i & B_i \end{vmatrix},$$

et

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=1}^{i=m} C_i \varphi_i(x,y),$$

et l'on demande de déterminer les constantes C_i de manière que le polynome Φ prenne, pour $x = x_i$ et $y = y_i$, une valeur donnée u_i.

Montrer que le polynome Φ, ainsi obtenu, comprend, comme cas particulier, la formule d'interpolation de Lagrange.

3° Démontrer que tous les polynomes en x et en y qui pour $x = x_i$ et $y = y_i$ prennent la valeur u_i peuvent être mis sous la forme

$$\Phi = Mf + NF,$$

M et N étant des polynomes entiers en x et en y.

(*Concours général*, 1887.)

19. Soit $u_{n,p}$ la somme des p premiers coefficients du développement de $(x+y)^n$. On a la relation

$$u_{n,p} = u_{n-1,p-1} + u_{n-1,p}.$$

Vérifier que $u_{n,p} = 2^n$ pour $p \geqslant n+1$.

Trouver l'expression de $u_{n,p}$ au moyen des p valeurs qu'elle prend si, considérant n comme variable, on attribue à p les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$.

On obtiendra, en employant la formule d'interpolation de Newton,

$$u_{n,p} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-p+2)}{(p-1)!},$$

résultat qui ressort d'ailleurs de la définition même de la fonction u ; et en employant la formule de Lagrange, on aura

$$\begin{aligned} u_{n,p} = n(n-1)\cdots(n-p+1)\Bigg[&\frac{2^{p-1}}{(p-1)!(n-p+1)} \\ &- \frac{2^{p-2}}{1!(p-2)!(n-p+2)} + \frac{2^{p-3}}{2!(p-3)!(n-p+3)} - \cdots \\ &\cdots \pm \frac{2}{(p-2)!1!(n-1)} \mp \frac{1}{(p-1)!n}\Bigg]. \end{aligned}$$

(LAISANT.)

20. D'après M. d'Ocagne, si dans le développement de $(x-1)^{2\mu}$ on remplace $x^{2\mu}$, $x^{2\mu}-1$, $x^{2\mu}-2$, ... par n^{μ}, $(n-1)^{\mu}$, $(n-2)^{\mu}$, ..., n étant un entier quelconque, on obtient une expression identiquement nulle.

(*Int. des math.*, question 6, p. 2 et 11.)

21. Séparer les racines des équations

$$e^{x-1} = x^{e-1},$$

$$e^x - x^e - \frac{\pi}{2} = e.$$

22. Calculer celle des racines de l'équation

$$x^3 - 9x + 2 = 0$$

qui est comprise entre 2 et 3.

Résultat 2,88202054 à $(0,1)^8$ par défaut.

(Finck.)

23. Calculer la racine positive de l'équation

$$x^3 + 86x - 201 = 0.$$

Résultat 2,211451888026846 à $(0,1)^{15}$ près.

24. Calculer à $\frac{1}{10^3}$ près par défaut la plus grande racine positive de l'équation

$$x^3 - 5x^2 - 14x - 8 = 0.$$

Résultat 7,123.

(*Nouvelles Annales.*)

25. Calculer à $\frac{1}{100}$ près par défaut celle des racines de l'équation

$$x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 3x - 4 = 0$$

qui est comprise entre 2 et 3.

Résultat 2,41.

(*Nouvelles Annales.*)

26. Résoudre l'équation

$$(e^x + e^{-x}) \cos x = 2.$$

Résultat $x = 4,73004099$.

27. Résoudre l'équation

$$(e^x + e^{-x}) \cos x = -2.$$

Résultat $x = 1,87510402$.

(Les exercices 26 et 27 sont empruntés au *Traité d'Algèbre* de M. Bertrand.)

Trouver les différences successives des fonctions

28. x^m,

29. $\sin x$,

30. $\cos x$.

31. Étant donnée une série

$$S = u_0 + u_1 x + \cdots + u_n x^n,$$

la transformation d'Euler consiste à poser $x = \frac{y}{1+y}$, d'où il suit que

$$S = u_0 + y u_1 + y^2 \Delta u_1 + \cdots + y^n \Delta^{n-1} u_1 + \cdots$$

Examiner le cas de $x = -1$.

CHAPITRE XVII

CALCUL DES PROBABILITÉS

« Au lieu qu'on n'a employé jusqu'ici l'analyse qu'à découvrir des raports constants et immuables entre des nombres et des figures, on s'en sert ici pour découvrir des raports de probabilité entre des choses incertaines et qui n'ont rien de fixe, ce qui semble fort opposé à l'esprit de la Géométrie, et en quelque façon hors de ses règles. »

MONTMORT.

QUESTIONS TRAITÉES [1]

Question I. — *Parmi les cinquante-deux cartes d'un jeu complet, on prend les treize d'une même couleur. Quelle est la probabilité pour que, de ces treize cartes, la première que l'on tire soit le roi, la seconde la dame?*

PREMIÈRE MÉTHODE. — Le nombre des cas possibles est celui des permutations de 13 lettres, ou 13 ! ; le nombre des cas favorables est celui des permutations de 11 lettres, ou 11 ! , car il y a deux cartes, sur les treize, dont le rang est assigné. Ainsi la probabilité est

$$\frac{11\,!}{13\,!} = \frac{1}{156}.$$

DEUXIÈME MÉTHODE. — La probabilité de tirer le roi est évidemment $\frac{1}{13}$; cette carte étant enlevée, la probabilité de tirer la dame est $\frac{1}{12}$, et le nombre cherché est

$$\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{156}.$$

(Voyez question proposée 6.)

Question II. — « *On demande combien il y a à parier contre un que tirant cinq cartes dans un jeu de piquet, composé de trente-deux, l'on ne*

(1) Voir aux questions proposées un certain nombre de définitions.

tirera pas une quinte majeure indéterminée, sans nommer en quelle couleur, soit en cœur, soit en carreau, en pique ou en trèfle ».

On peut prendre 32 cartes 5 à 5 d'un nombre de manières égal à

$$28 \times 29 \times 30 \times 31 \times 32 = 201\,376.$$

Il y a quatre quintes majeures, donc il y a à parier 4 contre $201\,376 - 4$, ou 1 contre 50343 qu'on ne tirera pas à volonté une quinte majeure.

S'il s'agissait d'une quinte quelconque, il faudrait, comme il y a 16 quintes, parier 16 contre $201\,376 - 16$, ou 1 contre 12585.

(D'ALEMBERT, *Encyclopédie méthodique*, tome I, p. 307.)

Question III. — « *On propose de calculer les différentes chances de la* Loterie royale. »

« *La* roue de la loterie *renferme* 90 *numéros, chaque* tirage *en fait* « *sortir* 5. *Quand on annonce qu'un certain numéro fera partie des* 5 « *sortans, cela s'appelle jouer l'*extrait simple ; *si l'on détermine le* « *rang que ce numéro devra occuper dans les* 5 *sortans, si l'on dit,* « *par exemple, qu'il sortira le premier, on joue l'*extrait déterminé. « *Lorsqu'on dit que* deux, trois *ou* quatre *numéros feront partie des* « 5 *sortans, sans désigner l'ordre de ces numéros, on joue ce qui* « *s'appelle l'*ambe, *ou le* terne, *ou le* quaterne. *On ne laisse plus jouer* « *le* quine, *qui consiste à désigner les* 5 *numéros sortans.* »

(REYNAUD, *Algèbre.*)

1° *Extrait déterminé.* — Il y a le même nombre de chances pour que chaque numéro sorte le premier : la probabilité de sortie est $\frac{1}{90}$.

2° *Extrait simple.* — Le nombre des chances favorables est cinq fois plus grand : la possibilité est $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$.

3° *Ambe.* — Le nombre des cas favorables est celui des combinaisons de 5 numéros 2 à 2, ou 10 ; celui des cas possibles est le nombre des combinaisons de 90 numéros 2 à 2, ou 4005 : la probabilité de sortie est $\frac{C_{5,2}}{C_{90,2}} = \frac{10}{4005}$.

4° *Terne.* — On trouve de même que la probabilité est

$$\frac{C_{5,3}}{C_{90,3}} = \frac{10}{117\,480}.$$

5° *Quaterne.* — La probabilité est $\frac{C_{5,4}}{C_{90,4}} = \frac{5}{2555190}$.

6° *Quine.* — La probabilité est $\frac{1}{C_{90\cdot 5}} = \frac{1}{43949268}$.

D'après cela, dans chacun des cinq premiers cas, le gagnant devait recevoir respectivement 90, 18, 400 $\frac{1}{2}$, 11748, 511038 fois sa mise. En réalité, il la recevait 75, 15, 270, 5500, 75000 fois.

Nous empruntons au CALCUL DES PROBABILITÉS DE LACROIX, publié en 1816, les curieuses réflexions suivantes :

« Les personnes qui jouent entre elles des jeux de société, où les conditions du pari sont égales, et qui parviennent à peu près au même degré d'habileté, voient à la longue leurs pertes et leurs gains se rapprocher beaucoup ; au contraire, les banquiers qui se chargent de tenir un jeu de pur hasard, moyennant certains avantages sur les chances, se procurent un bénéfice assuré, dès qu'ils ont des fonds suffisans pour faire face à quelques événemens trop défavorables qui peuvent arriver de tems à autres. »

Par exemple, dans la Loterie royale, le quine rendait un million de fois la mise ; l'*espérance mathématique* (1) du banquier excédait donc celle des *pontes* de

$$\frac{43949267 - 999999}{43949268} = \frac{42949268}{43949268},$$

ou de plus de $\frac{42}{43}$.

« Les mises par extrait, qui sont les plus nombreuses, se distribuent très inégalement entre les 90 numéros, selon la date de leur dernière sortie, ou d'après des rêveries superstitieuses ; aussi l'administration de la loterie, qui craignait la sortie d'un numéro trop *chargé* de mises, s'était réservé le droit de le *fermer*, c'est-à-dire de ne pas recevoir les mises qui seraient faites sur ce numéro ; mais une longue expérience l'ayant bien rassurée sur cette crainte ; elle ne met plus à présent de restriction à la volonté des pontes : seulement, comme autrefois, elle fait vendre des billets arrangés d'avance, afin de répandre autant qu'il est possible les mises sur toutes les combinaisons. Cependant il n'est pas nécessaire que le partage des mises approche beaucoup de l'égalité, pour mettre le banquier hors de perte : c'est ce dont on peut se convaincre, en considérant ses avantages sous le rapport des recettes aux dépenses dans chaque tirage.

« Si toutes les mises par extrait étaient les mêmes, un tirage lui coûterait

---

(1) « On appelle *espérance mathématique* de celui qui prétend à une somme éventuelle la valeur probable de cette somme, c'est-à-dire le produit de la somme par la probabilité que le prétendant a de l'obtenir.

« *Dans tout jeu équitable, la mise de chaque joueur doit être égale à son espérance mathématique ;* et, par suite, *les mises des divers joueurs sont proportionnelles à leurs probabilités respectives de gagner.* C'est la règle des *paris*.

« *Lorsque des joueurs se séparent avant que la partie soit terminée, ils doivent partager l'enjeu proportionnellement aux probabilités respectives qu'ils auraient alors de gagner.* Cest la règle des *partis* (compositio sortis.) »

(ROUCHÉ, *Nouvelles Annales*, décembre 1888.)

5×15 mises ou 75 mises ; s'il en avait reçu 90, il aurait un bénéfice assuré de 15 mises, et il serait au pair, s'il y avait eu seulement 75 numéros placés. Faisant le même calcul sur les autres manières de jouer les numéros, on verra l'excédant de la recette sur la dépense augmenter d'une manière si rapide, que le pair est atteint bien avant que toutes les combinaisons ou les arrangemens soient remplis.

« Au reste, les profits bien constatés de la loterie, pendant une longue suite d'années, les pertes et les désordres, malheureusement aussi bien constatés, dont elle a été la cause, pour une multitude de gens de toute profession, enivrés par ses espérances trompeuses, parlent encore plus haut que les calculs précédens, contre la faiblesse qui fait hasarder dans un jeu aussi inégal un argent dont on pourrait faire un usage profitable autant à l'amélioration des mœurs qu'aux avantages physiques des hommes, s'il y avait des caisses d'épargne solidement établies, sagement administrées, où recueillant les petites économies de l'ouvrier laborieux et du domestique fidèle, on leur préparât des ressources assurées pour le temps de la vieillesse et des infirmités.

« Ceux qui veulent absolument se bercer d'espérances frivoles, ont retourné de toutes les manières les combinaisons que présentent la constitution de la loterie et les tableaux des numéros sortis depuis son établissement, afin d'y chercher un moyen de trouver son côté faible. Ce qu'ils ont pu faire de moins déraisonnable revient à déterminer des progressions de mises croissant de manière qu'un événement heureux dont la probabilité serait assez considérable, pût couvrir la perte passée ; mais par ce moyen on ne saurait arriver à une probabilité un peu grande d'obtenir un gain même très-faible, qu'en exposant une somme assez forte pour que sa perte entraînât de bien plus graves inconvéniens que le gain ne pourrait donner d'avantages. Les pontes qui ont peu de fortune ne sauraient suivre de semblables jeux, ce qu'on appelle faire la *martingale*, sans se gêner ou s'obérer, et sont souvent forcés de les abandonner, en perdant tout ce qu'ils y ont exposé. Quant aux gens riches, ils peuvent faire de leurs capitaux un emploi bien plus avantageux, en se livrant aux améliorations de l'agriculture, au perfectionnement des arts, au développement du commerce. Dans cette espèce de jeu, dont on peut dire que la nature est le banquier, parce que sa force reproductive en fait le fonds, les pontes sages et éclairés augmentent leur fortune en procurant à la société un accroissement de bien-être. »

Question IV. — « PROBLÈME SUR LE JEU DES SAUVAGES, APPELLÉ JEU DES NOYAUX ».

« Le baron de la Hontan fait mention de ce jeu dans le second tome « de ses Voyages de Canada. Voici comment il s'explique. »

« *On y joue avec huit noyaux noirs d'un côté et blancs de l'autre ; on* « *jette les noyaux en l'air : alors si les noirs se trouvent impairs, celui* « *qui a jetté les noyaux gagne ce que l'autre Joueur a mis au jeu. S'ils se*

« *trouvent ou tous noirs ou tous blancs, il en gagne le double ; et hors de* « *ces deux cas il perd sa mise.* »

« *On demande lequel des deux Joueurs a de l'avantage, en supposant* « *qu'ils mettent également au jeu.* »

. . . . . .

« Il y a, 1°, 8 coups sur 256 pour amener un noir et sept blancs ; « 2°, 56 coups pour avoir trois noirs et cinq blancs ; 3°, 28 coups pour « avoir deux noirs et six blancs ; 4°, 70 coups pour avoir quatre noirs « et quatre blancs. Il est évident qu'on ne peut les amener ou tous « noirs ou tous blancs que d'une façon. Il suit de tout cela que si l'ar- « gent du jeu est appellé A, le sort de celui qui jette les noyaux sera

$$\frac{128 \times A + 2 \times A + \frac{1}{2}A}{256},$$

« et le sort de l'autre Joueur sera

$$\frac{126 \times A + 2 \times 0 - \frac{1}{2}A}{256}.$$

« Ainsi l'avantage de celui qui jette les noyaux est $\frac{3}{256}$; et pour que le « jeu fût égal, il faudroit que celui qui jette les noyaux mit au jeu 22 « contre l'autre 21. »

(MONTMORT, *Essay d'Analyse sur les Jeux de hazard*, p. 153.)

Question V. — ÉTRANGES ERREURS AMENÉES PAR L'EMPLOI ABUSIF DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

« Le chevalier de Méré, ami de Pascal, et qui fit naître le calcul des probabilités, en excitant ce grand géomètre à s'en occuper, lui disait « qu'il avait trouvé fausseté dans les nombres par cette raison : Si l'on entreprend de faire six avec un dé, il y a de l'avantage à l'entreprendre en 4 coups, comme de 671 à 625. Si l'on entreprend de faire sonnés avec deux dés, il y a désavantage à l'entreprendre en 24 coups. Néanmoins 24 est à 36, nombre de faces de deux dés, comme 4 est à 6, nombre des faces d'un dé. » — « Voilà, écrivait Pascal à Fermat, quel était son grand scandale, qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait... *Il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre : c'est, comme vous savez, un grand défaut.* » Le chevalier de Méré, trompé par une fausse analogie, pensait que, dans le cas de l'égalité des paris, le nombre des coups doit croître proportionnellement au nombre de toutes les chances possibles, ce qui n'est pas exact, mais ce qui approche d'autant plus de l'être, que ce nombre est plus grand. »

« On a essayé d'expliquer la supériorité des naissances des garçons sur les naissances des filles, par le désir général des pères d'avoir un fils qui perpétue leur nom. Ainsi, en imaginant une urne remplie d'une infinité de boules blanches et noires, en nombre égal, et supposant un grand nombre de personnes dont chacune tire une boule de cette urne, et continue ce tirage avec l'intention de s'arrêter quand elle aura extrait une boule blanche, on a cru que cette intention devait rendre le nombre des boules blanches extraites supérieur à celui des noires. En effet, elle donne nécessairement après tous les tirages un nombre de boules blanches au moins égal à celui des personnes ; et il est possible que ces tirages n'amènent aucune boule noire. Mais il est facile de reconnaître que cet aperçu n'est qu'une illusion ; car si l'on conçoit que dans un premier tirage toutes les personnes tirent à la fois une boule de l'urne, il est évident que leur intention ne peut avoir aucune influence sur la couleur des boules qui doivent sortir à ce tirage. Son unique effet sera d'exclure du second tirage les personnes qui auront amené une boule blanche au premier. Il est pareillement visible que l'intention des personnes qui prendront part au nouveau tirage n'influera point sur la couleur des boules qui sortiront, et qu'il en sera de même des tirages suivants. Cette intention n'influera donc point sur la couleur des boules extraites dans l'ensemble des tirages ; seulement elle fera participer plus ou moins de personnes à chacun d'eux. Le rapport des boules blanches extraites aux noires sera ainsi très peu différent de l'unité. Il suit de là que le nombre des personnes étant supposé fort grand, si l'observation donne entre les couleurs extraites un rapport qui diffère sensiblement de l'unité, il est très probable que la même différence a lieu à fort peu près entre l'unité et le rapport des boules blanches aux boules noires contenues dans l'urne. »

« Je mets encore au rang des illusions l'application que Leibniz et Daniel Bernoulli ont faite du calcul des probabilités à la sommation des séries. Si l'on réduit la fraction dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est l'unité plus une variable, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de cette variable, il est facile de voir qu'en supposant la variable égale à l'unité, la fraction devient $\frac{1}{2}$, et la suite devient *plus un*, *moins un*, *plus un*, *moins un*, etc. En ajoutant les deux premiers termes, les deux suivants et ainsi du reste, on transforme la suite dans une autre dont chaque terme est zéro. Grandi, jésuite italien, en avait conclu la possibilité de la création, parce que la suite étant toujours égale à $\frac{1}{2}$, il voyait cette fraction naître d'une infinité de zéros, ou du néant. Ce fut ainsi que Leibniz crut voir l'image de la création, dans son arithmétique binaire où il n'employait que les deux caractères : zéro et l'unité. Il imagina que l'unité pouvait représenter Dieu, et zéro le néant ; et que l'être suprême avait tiré du néant tous les êtres, comme l'unité avec le zéro exprime tous les nombres dans ce système d'arithmétique. Cette idée plut tellement à Leibniz, qu'il en fit part au jésuite Grimaldi, président du tribunal de mathématiques à la Chine, dans l'espérance que cet emblème de la création convertirait au christianisme l'empereur d'alors, qui aimait particulièrement les sciences. Je ne rapporte

ce trait que pour montrer jusqu'à quel point les préjugés de l'enfance peuvent égarer les plus grands hommes. »

« Leibniz, toujours conduit par une métaphysique singulière et très déliée, considéra que la suite *plus un*, *moins un*, *plus un*, etc., devient l'unité ou zéro, suivant que l'on s'arrête à un nombre de termes impair ou pair ; et comme dans l'infini il n'y a aucune raison de préférer le nombre pair à l'impair, on doit, suivant la règle des probabilités, prendre la moitié des résultats relatifs à ces deux espèces de nombres, et qui sont zéro et l'unité ; ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour la valeur de la série. Daniel Bernoulli a étendu depuis ce raisonnement à la sommation des séries formées de termes périodiques. Mais toutes ces séries n'ont point, à proprement parler, de valeurs : elles n'en prennent que dans le cas où leurs termes sont multipliés par les puissances successives d'une variable moindre que l'unité. Alors ces séries sont toujours convergentes, quelque petite que l'on suppose la différence de la variable à l'unité ; et il est facile de démontrer que les valeurs assignées par Bernoulli, en vertu de la règle des probabilités, sont les valeurs mêmes des fractions génératrices des séries, lorsque l'on suppose dans ces fractions la variable égale à l'unité. Ces valeurs sont encore les limites dont les séries approchent de plus en plus, à mesure que la variable approche de l'unité. Mais lorsque la variable est exactement égale à l'unité, les séries cessent d'être convergentes : elles n'ont de valeurs qu'autant qu'on les arrête. Le rapport remarquable de cette application du calcul des probabilités, avec les limites des valeurs des séries périodiques, suppose que les termes de ces séries sont multipliés par toutes les puissances consécutives de la variable. Mais ces séries peuvent résulter du développement d'une infinité de fractions différentes, dans lesquelles cela n'a pas lieu. Ainsi la série *plus un*, *moins un*, *plus un*, etc., peut naître du développement d'une fraction dont le numérateur est l'unité plus la variable, et dont le dénominateur est ce numérateur augmenté du carré de la variable. En supposant la variable égale à l'unité, ce développement se change dans la série proposée, et la fraction génératrice devient égale à $\frac{2}{3}$; les règles des probabilités donneraient donc alors un faux résultat ; ce qui prouve combien il serait dangereux d'employer de semblables raisonnements, surtout dans les sciences mathématiques que la rigueur de leurs procédés doit éminemment distinguer. »

(Œuvres de Laplace ; tome septième : *Théorie analytique des probabilités*. Pages CXXIX à CXXXII. 1847.)

Le P. Grandi eut au sujet de la théorie indiquée précédemment, avec Alessandro Marchetti une dispute qui dura deux ans et finit seulement à la mort de celui-ci. Marchetti voyait dans cette théorie un danger pour la religion.

QUESTIONS PROPOSÉES

Problèmes tirés du « Calcul des Probabilités », *de* Lacroix (1816.)

Soit m le nombre des cas favorables à un événement, n le nombre des cas non favorables, $m+n$ par conséquent le nombre total des cas possibles, la fraction $\frac{m}{m+n}$ est la probabilité de l'événement. Nous supposons tous les cas également possibles.

1. Ayant un jeu de 32 cartes, la probabilité pour qu'en tirant au hasard une carte de ce jeu on ait une figure est $\frac{3}{8}$, la probabilité contraire $\frac{5}{8}$.

2. Calculer la probabilité d'amener, en jetant deux dés ensemble, les points 5 et 2 sans distinction d'ordre.

3. Probabilité d'amener dans les mêmes conditions les points 6 et 6 (ce qu'on appelait le *sonnez*).

4. On prend une carte au hasard dans un jeu de piquet (52 cartes) : probabilité pour que ce soit une figure.

5. On jette deux dés à la fois : probabilité pour que la somme des points obtenus soit un nombre donné.

Quand on prend à part deux événements possibles parmi d'autres, on appelle *probabilité relative* d'un de ces événements le rapport de sa probabilité absolue à la somme des probabilités absolues des deux événements que l'on compare.

6. Deux personnes jouent ensemble en jetant deux dés à la fois, sous la condition pour l'une d'amener le point 7 et pour l'autre le point 4. Trouver les probabilités relatives de gain pour chacune d'elles.

7. La probabilité pour que deux ou plusieurs événements soient concomitants (*probabilité composée*) est égale au produit des probabilités propres de chacun d'eux.

8. Soient deux urnes renfermant la première deux boules blanches et une noire, la deuxième quatre boules blanches et une noire. Probabilité d'amener : 1° une boule blanche $\left(\text{on trouve } \frac{11}{15}\right)$, 2° une boule noire $\left(\text{on trouve } \frac{4}{15}\right)$ en prenant au hasard dans une quelconque de ces urnes.

9. Même question, avec a urnes, renfermant chacune r boules blanches et s noires, et b urnes, renfermant chacune t boules blanches et u noires. On trouve pour la probabilité d'amener une boule blanche

$$\frac{ar(t+u)+bt(r+s)}{(a+b)(r+s)(t+u)}.$$

10. Soit une urne renfermant des boules blanches et des boules noires : la probabilité de tirer une boule blanche est e, celle de tirer une boule noire f. On prend successivement quatre boules, en remettant à chaque fois la boule sortie : probabilité pour qu'on ait trois boules blanches et une noire. On trouve $4e^3f$.

Épreuves répétées.

11. Probabilité d'amener deux fois de suite le point 6, en jetant le même dé $\left(\frac{1}{36}\right)$, de ne pas l'amener du tout $\left(\frac{25}{36}\right)$.

12. Dans une épreuve il y a m chances qui produisent l'événement A, n qui produisent l'événement B, probabilités d'amener les successions AA, AB, BA, BB.

13. Même problème si l'on ne distingue plus l'ordre des événements simples.

14. Même problème pour p épreuves, l'ordre des événements restant indifférent. On trouvera que le nombre des chances donnant $p-q$ fois l'événement A et q fois l'événement B est

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)}{q!}m^{p-q}n^q.$$

15. Même problème pour p épreuves, en distinguant l'ordre des épreuves. (Le nombre des chances devient $m^{p-q}n^q$.)

16. Probabilité de n'avoir pas moins de $p-1$ événements A sur le nombre p d'épreuves. On trouve

$$e^p+\frac{p}{1}e^{p-1}f, \quad \text{où} \quad e=\frac{m}{m+n} \quad \text{et} \quad f=\frac{n}{m+n}.$$

17. Plus généralement, probabilité de n'avoir pas moins de $p-q$ événements A et plus de q événements B.

18. Exemple : probabilité d'amener le point 6 au moins deux fois dans 4 jets successifs d'un dé à 6 faces. On trouve $\frac{171}{1296}$.

19. Autre exemple : probabilité d'amener le point 6 au moins une fois en 4 jets.

Résultat $\frac{671}{1296}$: on cherche la probabilité de l'événement contraire.

20. Au bout de combien de jets du même dé aura-t-on la probabilité g pour que le point 6 arrive au moins une fois ?

On cherche la probabilité contraire k égale à $1-g$, et on trouve

$$\frac{\mathrm{L}k}{\mathrm{L}f}, \quad \text{où} \quad f=\frac{5}{6}.$$

21. Trouver le nombre de jets de deux dés, dans lequel il y a autant de probabilité d'amener deux 6 que de ne pas le faire.

Le résultat $\frac{\mathrm{L}2}{\mathrm{L}36-\mathrm{L}35}$ est compris entre 24 et 25 : ce problème fut proposé à Pascal par le chevalier de Méré.

22. Dans un nombre p d'épreuves, il peut y avoir différentes successions d'événements simples A et B. Déterminer lequel de ces événements composés est le plus probable, en supposant toujours qu'il y ait le même nombre de chances favorables en faveur de chacun des événements simples A et B.

Il suffit de chercher le plus grand terme du développement de $(m+n)^p$.

23. Probabilité qu'en prenant au hasard dans un tas composé de m pièces on en ôte un nombre pair e ou un nombre impair f. — On trouve

$$e=\frac{2^{m-1}}{2^m-1}, \qquad f=\frac{2^{m-1}-1}{2^m-1}.$$

24. *Loterie royale.*— A chaque tirage il sort 5 des 90 numéros contenus dans la roue : on a mis sur deux numéros, on demande la probabilité pour qu'il en sorte au moins un. — On trouve $\frac{87}{801}$.

25. *Généralisation.* — Sur une loterie composée de p numéros dont il sort q à chaque tirage, obtenir la probabilité que sur s numéros désignés il en sortira t. — On trouve

$$\frac{\dfrac{(p-s)(p-s-1)\ldots[p-s-(q-t)+1]}{(q-t)!}\times\dfrac{s(s-1)\ldots(s-t+1)}{t!}}{\dfrac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{q!}}.$$

26. Trois joueurs A, B, C ont réuni 12 jetons, dont 4 blancs et 8 noirs. Ils conviennent que celui d'entre eux qui les yeux bandés tirera le premier un jeton blanc gagnera. C'est A qui doit tirer le premier, B le second et C le troisième. On demande la probabilité que chacun a en sa faveur.

On supposera 1° avec Montmort que le jeton tiré doive être remis chaque fois au tas, et

on trouvera les probabilités $\frac{9}{19}$, $\frac{6}{19}$ et $\frac{4}{19}$; 2° avec de Moivre qu'il ne le soit pas, et dans ce cas plus compliqué les probabilités seront $\frac{77}{165}$, $\frac{53}{165}$ et $\frac{35}{165}$.

27. Probabilité d'obtenir, dans un nombre p d'épreuves, $p-q$ événements A et q événements B.

28. Probabilité d'obtenir, dans un nombre $p_1+p_2+\ldots+p_n$ d'épreuves, p_1 événements A, p_2 événements B, ..., p_n événements A_n.

29. « Pierre se proposant de jeter en l'air une pièce de monnaie, promet de donner à Paul 1 ducat, si, dès le 1er coup, cette pièce étant tombée montre la face ; 2, si cela n'arrive qu'au 2e coup ; 4, si ce n'est qu'au 3e, et ainsi de suite, en doublant à chaque coup : on demande le sort de Paul. » (Problème de Pétersbourg, proposé à Montmort par Nicolas Bernoulli. — On se bornera à indiquer les probabilités qu'a Paul de gagner au 1er, au 2e, ..., au ne coup.)

Détermination de la probabilité a posteriori.

Considérons maintenant des événements se rapportant à des cas qui n'offrent pas tous la même possibilité, et tels que les rapports des chances de chaque espèce ne puissent pas être assignés à l'avance. On pose en principe que « les probabilités des causes (ou des hypothèses) sont proportionnelles aux probabilités que ces causes donnent pour les événemens observés » [1]. Ainsi il peut se faire que l'on joue avec un dé de forme quelconque, que l'on ait dans une urne des boules dont le nombre n'est pas connu. Prenons un exemple numérique :

30. D'une urne on tire successivement trois boules blanches et une noire ; l'une renfermera, ou bien 3 boules blanches et 1 noire, ou bien 2 boules blanches et 2 noires, ou enfin 1 boule blanche et 3 noires. En se reportant à un problème précédent, on trouvera, dans ces diverses hypothèses, pour le cas de la sortie de 3 boules blanches et 1 noire, les probabilités

$$\frac{27}{64},\quad \frac{16}{64},\quad \frac{3}{64}.$$

On en déduira, d'après le principe énoncé, que les probabilités des diverses hypothèses sont

$$\frac{27}{46},\quad \frac{16}{46},\quad \frac{3}{46}.$$

Généraliser. — h, h', h'' et h''' étant les probabilités de diverses hypothèses qui peuvent amener l'événement composé dont on s'occupe, et a, a', a'' et a''' les probabilités que chaque hypothèse donne pour ces événements, on a

$$\frac{h}{a}=\frac{h'}{a'}=\frac{h''}{a''}=\frac{h'''}{a'''}=\frac{1}{a+a'+a''+a'''},$$

(1) Règle dite de Bayes, du nom du géomètre anglais qui l'a inventée.

ce qui veut dire que « les probabilités des diverses hypothèses se forment en divisant la probabilité de l'événement composé, calculée dans chaque hypothèse, par la somme de ses probabilités dans toutes les hypothèses. »

32. Partant de là, démontrer que « la probabilité d'un nouvel événement « simple s'obtient en calculant, d'après les événemens passés, la probabilité « des diverses hypothèses possibles, et faisant la somme des produits de ces « probabilités par celles de l'événement, prises dans chaque hypothèse ».

33. Dans les conditions du problème 30, déterminer la probabilité d'obtenir, au 5e tirage, une boule blanche ou une boule noire. On trouvera $\frac{116}{184}$ et $\frac{68}{184}$.

Problèmes tirés de l'« ANALYSE SUR LES JEUX DE HAZARD », *de* MONTMORT, 1708.

34. Je me propose de tirer d'un jeu d'Ombre (quarante cartes) comme quatre premières cartes les quatre as. Quel est mon sort ? (Autrement dit, quelle est la probabilité de l'événement que j'annonce ?)

35. « Pierre tient deux jettons blancs, deux jettons noirs et deux jettons « rouges. Il parie contre Paul que les ayant mêlez, et tirant ensuite trois jet- « tons au hasard entre ces six il en tirera un blanc, un noir et un rouge. « Quel est le sort de Pierre et celui de Paul ? »

36. « Pierre tient entre ses mains un jeu entier composé de cinquante-deux « cartes. On demande en combien de façons différentes il peut, tirant quatre « cartes au hazard dans ces cinquante-deux en tirer un carreau, un cœur, un « pique et un trèfle. »

37. « Pierre se propose de tirer sept cartes dans cinquante-deux, en sorte « qu'il y en ait trois doubles (une carte double signifiant deux rois, deux da- « mes, etc.) et une simple. » Quel est son sort ?

38. « Pierre se propose de tirer huit cartes dans cinquante-deux, en sorte « qu'il y en ait une triple, deux doubles et une simple. » Quel est son sort ?

39. « Pierre se propose de tirer treize cartes dans deux jeux entiers compo- « sés de 104 cartes, de manière qu'il y en ait deux quadruples, deux doubles « et une simple. » Quel est son sort ?

40. « Pierre est dernier au Piquet, et est supposé n'avoir point d'as. On de- « mande quelle est son espérance d'en tirer ou un, ou deux, ou trois (dans les « trois cartes qui lui reviennent au talon).

41. « Pierre est dernier au Piquet et est supposé ne point porter de carreau.

« On demande combien il y a à parier qu'il lui rentrera dans ses trois cartes « de quoi empêcher que Paul qui est premier ne puisse avoir de quinte ou « au-dessus ».

42. « Pour avoir un Impériale au jeu qui porte ce nom, il faut avoir ou qua- « tre as, ou quatre Rois, ou quatre Dames, ou quatre valets, ou quatre sept, « ou quatrième majeure, ou carte blanche. On demande combien un joueur « peut parier qu'il lui viendra un Impériale déterminé, par exemple un Impé- « riale d'as, ou carte blanche. » (Le jeu comprend 32 cartes, chaque joueur en prend 12, sans pouvoir en écarter. Un joueur a carte blanche, quand dans ses douze cartes il n'a ni as, ni roi, ni dame, ni valet.)

43. *Généralisation du Jeu des noyaux.* — Les noyaux ont quatre faces, une blanche, une noire, une verte et une rouge. Pierre joue avec Paul et il jette les noyaux d'après les conventions suivantes. S'il y a des noyaux des quatre couleurs, Paul donne B à Pierre ; s'il y a seulement des noyaux de trois couleurs, Paul lui donne 3B ; s'il y en a d'une seule couleur, Paul lui donne 4B. Enfin, s'il y en a de deux couleurs seulement, Pierre donne 2A à Paul. Cela posé, on demande de quel côté est l'avantage, et quel est cet avantage. Examiner le cas particulier de $A = B$.

(Ch. XVII, IV).

QUESTIONS DIVERSES.

44. Un tribunal est composé de trois juges dont le degré de capacité est $\frac{1}{10}$; trouver la probabilité pour la bonté du jugement : 1° si l'accusé est condamné à l'unanimité ; 2° s'il est condamné par deux voix contre une.

45. L'ancien tribunal criminel comprenait d'ordinaire 7 juges : il en fallait 5 pour condamner à mort. Trouver la probabilité pour la bonté du jugement, le degré de capacité des juges étant $\frac{1}{10}$: 1° si la condamnation est rendue à l'unanimité ; 2° si elle l'est par 6 voix contre une ; 3° si elle l'est par 5 voix contre 2.

46. « C'est la coutume à Gênes d'élire, ou plutost de tirer au sort tous les ans d'entre les 100 Sénateurs cinq personnes qui doivent avoir les principales Charges de la République. »

« Cela a donné lieu à des paris qui se font tous les ans touchant ceux à qui le sort arrivera. Il se trouve des banquiers qui promettront jusques à vingt mille pistoles pour une qu'on leur donnera si le sort tombe sur 5 qu'on aura nommez ; 5 ou 6 mille, s'il n'y a que 4 des 5 qu'on aura nommez, et 5 ou 6 cens, s'il y en a 3. Pour l'ordinaire ils ne donnent rien, pour un ni pour 2. On demande quels sont les hazars pour le Banquier et pour le Pariant, et quel profit le Banquier peut faire sur ce commerce. »

(DE FRÉNICLE, *Abrégé des combinaisons*, 1643).

47. Une loterie contient n billets et m lots, probabilité d'avoir un lot si on prend p billets. Dans quel cas jouera-t-on à jeu sûr ?

48. Il y a dans une urne m boules qui peuvent être, ou toutes noires, ou bien les unes blanches, les autres noires, dans un rapport inconnu. On tire à la fois 2 boules de cette urne, une de chaque main ; on regarde la boule qui est dans l'une des mains : elle est blanche. Combien y a-t-il à parier pour et contre que la boule qui est dans l'autre main est aussi blanche ? ».

(Lévy.)

49. On a 13 cartes dont aucune n'est répétée, on les bat, puis on les tire successivement en nommant suivant l'ordre des cartes : as, 2, 3, 4, ... jusqu'au roi qui est la dernière, et on parie qu'il arrivera au moins une fois qu'une carte sera à son rang. Quel doit être le rapport des paris ?

Réponse : il faut parier un peu moins de 11 contre 6.

(*Nouvelles Annales.*)

50. On trace sur un plan une série de lignes parallèles et équidistantes et on jette au hasard sur ce plan un disque circulaire de dimensions assez petites pour ne pas rencontrer deux lignes à la fois. Quelle est la probabilité pour que ce disque en rencontre une et la recouvre en partie ?

51. Même question pour une ligne courbe convexe de périmètre donné pour une aiguille de longueur donnée.

(Bertrand.)

Les cinq problèmes de Huyghens.

(*De Ratiociniis in ludo aleæ* (*Opera varia*, tome IV, p. 727).

52. A et B unà ludunt duabus tesseris, hâc conditione, ut A vincat, si senarium jaciat, et B si septenarium jaciat. A primò unum jactum instituat ; deinde B duos jactus consequenter ; tum rursùs A duos jactus, atque sic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B ? Resp. ut 10 355 ad 12 276.

A et B jouent ensemble avec deux dés, et voici la loi du jeu : A gagnera la partie s'il amène 6 points, et B s'il en amène 7. A commence et joue une fois, après quoi B joue deux fois consécutivement, puis A reprend et joue deux fois, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'un ou l'autre ait gagné. On demande quel est le rapport du sort de A au sort de B ? je réponds, comme 10 355 à 12 276.

26. Tres Collusores A, B et C assumentes 12 calculos, quorum 4 albi et 8 nigri existunt, ludunt hâc conditione : ut, qui primus ipsorum

Trois joueurs A, B et C prennent 12 jetons, 4 blancs et 8 noirs et jouent à cette condition : celui qui, les yeux voilés, amènera le premier

velatis oculis album calculum elegerit, vincat ; et ut prima electio sit penès A, secunda penès B, et tertia penès C, et tum sequens rursus penès A, atque sic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura sit ratio illorum sortium.

Sensus hujus Problematis ambiguus est, unde variis quoque solutionibus locus.....

un jeton blanc gagnera le pari : A tire le premier, B le second et C le troisième, puis A recommence et ainsi de suite alternativement. On demande en quels rapports serait leurs sorts respectifs.

53. A certat cum B quòd ipse ex 40 chartis lusoriis, id est, 10 cujusque speciei, 4 chartas extracturus sit ; ita ut ex unaquaque specie habeat unam. Et invenitur ratio sortis A ad sortem B ut 1 000 ad 8 139.

A parie avec B que sur 40 cartes à jouer, 10 de chaque espèce ou couleur, il en tirera 4, telles qu'il y en ait une de chaque espèce. Et il se trouve que le sort de A est au sort de B, comme 1 000 à 8 139.

54. Assumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis et 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus sit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B.

A prend 12 jetons, 4 blancs et 8 noirs, comme ci-dessus, et il parie avec B que, les yeux voilés, il en tirera 7, dont 3 seront blancs. On demande quel est le rapport du sort de A au sort de B. (On trouve $\frac{280}{512}$).

55. A et B assumentes singuli 12 nummos ludunt tribus tesseris hâc conditione : ut, si 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipsi B ; at si 14 puncta jaciantur, B tradat nummum ipsi A ; et ut ille ludum victurus sit, qui primum omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B, ut 244 140 625 ad 282 429 536 481.

Jacobi Bernoulli *Ars conjectandi*, p. 49.

A et B prennent chacun 12 écus et jouent avec 3 dés aux conditions suivantes : s'il vient 11 points, A donnera un écu à B ; mais s'il en vient 14, B donnera un écu à A ; et celui qui le premier aura réuni tous les écus gagnera la partie. Il se trouve que le sort de A est au sort de B comme 244 140 625 à 282 429 536 481.

ADDITIONS

QUESTIONS TRAITÉES

Question I. — La constante d'Euler.

La différence

$$K_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - Ln,$$

où n augmente indéfiniment, tend vers une limite finie.

1° K_n décroît constamment lorsque n augmente. En effet, on a

$$K_{n+1} - K_n = \frac{1}{n+1} + Ln - L(n+1) = \frac{1}{n+1} + L\frac{n}{n+1}.$$

Cette différence $K_{n+1} - K_n$ est négative, car

$$L\frac{n}{n+1} = L\left(1 - \frac{1}{n+1}\right),$$

et en développant par la formule de Taylor,

$$L\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^3} + \cdots\right).$$

2° Il suffit donc de démontrer que K_n reste constamment supérieure à un nombre fixe, zéro par exemple. Or on peut écrire

$$K_n = \left(1 - L\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - L\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - L\frac{4}{3}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{n-1} - L\frac{n}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n} - L\frac{n+1}{n}\right) + L\frac{n+1}{n}.$$

Le dernier terme est évidemment positif. Les autres le sont tous aussi, car on a en général

$$\frac{1}{p} - \mathrm{L}\frac{p+1}{p} = \frac{1}{p} - \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{p}\right);$$

mais, d'après la formule de Taylor (arrêtée au second terme du développement),

$$\mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2}\frac{1}{\left(1 + \frac{\theta}{p}\right)^2},$$

donc

$$\frac{1}{p} - \mathrm{L}\left(\frac{p+1}{p}\right) = \frac{1}{2p^2}\frac{1}{\left(1 + \frac{\theta}{p}\right)^2} > 0.$$

Cette limite K dont on vient de constater l'existence est appelée *constante d'Euler*[1]. Sa valeur approchée est

$$\mathrm{K} = 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,860\,60.$$

Question II. — *Sur certaines recherches de limites.*

Nous avons indiqué (chap. V, quest. 23 et 24) les vraies valeurs pour $x = 0$ des deux expressions

$$(1) \qquad \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}, \qquad (2) \quad \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{ex}{2}}{x^2}.$$

Le calcul présentant quelques difficultés, nous allons revenir sur ces deux questions.

1° Prenons le rapport des dérivées des deux termes de l'expression (1) : cela donne

$$(1+x)^{\frac{1}{x}-1}\left[\frac{1}{x} - \frac{(1+x)\mathrm{L}(1+x)}{x^2}\right].$$

Le premier facteur a pour limite e; si dans le second on développe $\mathrm{L}(1+x)$ en série, on a pour limite $-\frac{1}{2}$. La vraie valeur est $-\frac{e}{2}$.

---

(1) Cette quantité se présente dans l'étude de la fonction $\mathrm{L}\Gamma(x)$. C'est la valeur que prend pour $x = 1$ la dérivée $\frac{d}{dx}\mathrm{L}\Gamma(x)$, et l'on a aussi

$$\mathrm{K} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}\right)e^{-x}\,dx.$$

SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, tome II, p. 174 et 224.
BERTRAND, *Traité de Calcul différentiel et de Calcul integral*, tome II, p. 252.
LEGENDRE, *Exercices de Calcul integral*, tome I, p. 289 et 295.
LEGENDRE, *Traité des Fonctions elliptiques*, tome II, p. 434.
EULER, *Calcul différentiel*, p. 444.

2° Appliquons de même la règle de l'Hôpital à l'expression (2). Il faut avoir la limite de

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}-1}\left[\frac{1}{x}-\frac{(1+x)\mathrm{L}(1+x)}{x^2}\right]+\frac{e}{2}}{2x},$$

et il ne faut pas croire qu'ici nous puissions remplacer le facteur $(1+x)^{\frac{1}{x}-1}$ par sa limite e, car le dénominateur étant infiniment petit du premier ordre, nous ne pouvons négliger légitimement que les infiniment petits du second. Nous substituons donc respectivement, à $(1+x)^{\frac{1}{x}-1}$ et à $\mathrm{L}(1+x)$, les valeurs $e-\frac{3}{2}ex$ et $-\frac{1}{2}+\frac{x}{6}$ obtenues en négligeant les termes en x^2, et nous trouvons comme limite $\frac{11e}{24}$.

De là il résulte que les expressions

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}-e \qquad \text{et} \qquad (1+x)^{\frac{1}{x}}-e+\frac{ex}{2}$$

sont infiniment petites, la première du premier ordre, la deuxième du second ordre, x étant l'infiniment petit principal.

« On parviendrait plus rapidement au même but [1] par le développement direct.

Posons $$y=(1+x)^{\frac{1}{x}},$$
on a

$$y=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots}=e.e^{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots\right)},$$

et par conséquent

$$y=e\left[1-\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}-\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}-\cdots\right)^2\right]-\cdots,$$

et les premiers termes sont évidemment

$$y=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11x^2}{24}\right).$$

Les suivants, qui s'obtiennent sans difficultés, font connaître les limites des expressions

---

(1) Bertrand, *Traité de Calcul différentiel*, p. 481.

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{ex}{2} - \frac{11ex^2}{24}}{x^3}, \qquad \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{ex}{2} - \frac{11ex^2}{24} + \frac{11ex^3}{24}}{x^4},$$

dont la première est $\frac{11e}{24}$, et la seconde $\frac{1221}{2880}e$ ».

QUESTIONS PROPOSÉES

1. Trouver la limite, pour $m = \infty$, de

$$\left(\cos\frac{\pi}{m} + x\sin\frac{\pi}{m}\right)^m.$$

On trouve $e^{\pi x}$. Examiner le cas de $x = i$.

2. Transformer l'expression

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a+b}}$$

en une autre à dénominateur rationnel.

3. Résoudre l'équation

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m = a + bi.$$

Les racines peuvent-elles être réelles ?

4. La série alternée dont le terme général positif est $\frac{1}{n}$ et dont le terme général négatif est $\frac{-1}{n+an^b}$, où a et b sont positifs, est convergente si $b < 1$, divergente si $b \geqslant 1$.

(Bioche : *Revue de Math. spéciales.*)

5. Trouver

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos 2x\,dx.$$

On déduira le résultat de la formule suivante, que donne l'intégration par parties :

$$\int e^{ax}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+4}\left[\frac{2}{a} + \cos x\,(a\cos x + 2\sin x)\right].$$

6. Développer en série ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x l'expression

$$\frac{1}{x^2 - 2x\cos\varphi + 1}.$$

On peut arriver au résultat en mettant cette fraction sous la forme $\frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta}$,

et effectuant les divisions indiquées. On trouve

$$\frac{1}{\sin\varphi}\left(\sin\varphi + x\sin 2\varphi + x^2\sin 3\varphi + \cdots\right).$$

7. L'expression

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

tend vers une limite quand n augmente indéfiniment.

1° La différence

$$S_{n-1} - S_n = \frac{1}{\sqrt{n}[2n - 1 + 2\sqrt{n(n-1)}]}$$

étant positive, la fonction S_n décroît quand n augmente.

2° On démontre que cette différence reste inférieure au terme général α_{n-1} d'une série convergente, d'où on déduit $S_1 - S_n < \Sigma_{n-1}$, somme des $(n-1)$ premiers termes de cette série. On en conclut que l'expression considérée, lorsque n grandit indéfiniment, reste supérieure à un nombre fixe.

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE I
AVERTISSEMENT DE L'AUTEUR V

CHAPITRE I

Division algébrique. — Vérification des formules. — Analyse combinatoire. Imaginaires. — Logarithmes.

Questions traitées :

I. Vérification d'une formule 1
II. Binome factoriel de Vandermonde 3
III. Développement de $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$: la fonction X_n de Legendre . . . 4
IV. Triangle arithmétique de Pascal 6
V. Problème d'Adrianus Romanus 7
VI. Application singulière des combinaisons faite par le jésuite Bauhus 8
VII. La fonction aleph de Wronski 9

Questions proposées 10

CHAPITRE II

Convergence des séries. — Sommation dans quelques cas simples.

Questions traitées :

I-III. Étude de quelques séries 20
IV. Règle pour sommer certaines séries, et application 22
V. Série dont le terme général est le quotient de deux polynomes entiers . . 23
VI. Divergence de la série harmonique 23
VII. On ne peut altérer l'ordre des termes d'une série qui n'est pas absolument convergente 24
VIII. Sommation de certaines séries déduite de la série harmonique 25
IX. « Sur un théorème général de convergence » 26

Questions proposées 28

CHAPITRE III

Infiniment petits.

Questions traitées :

I-IV. Exemples de recherches d'ordres infinitésimaux 35
V. Faux raisonnement des disciples de Pyrrhon 36
VI. De la cycloïde et de sa compagne 37
VII. Théorie du planimètre 38
VIII. Du solide de la Roulette 43

IX. Note sur une question posée aux examens oraux de l'Ecole Polytechnique par M. Picquet 44
X. L'idée de limite et la compensation des erreurs dans les équations imparfaites, d'après les ouvrages de Leibniz, Carnot et de Freycinet 47

Questions proposées 53

CHAPITRE IV

Calcul des dérivées et des différentielles [1].

Questions traitées :

I. Démonstration de quelques identités 57
II. Equation différentielle de la série hypergéométrique de Gauss. 59
Dérivées successives des fonctions suivantes :
III. cos (n arc cos x) 60
IV. sin (n arc cos x) 62
V. $(x^2 + px + q)^n$ 63
VI. e^{-x^2} 63

Questions proposées 67

CHAPITRE V

Application de la théorie des dérivées à la recherche des maxima et des vraies valeurs.

Questions traitées [2] :

I-III. Recherches de maxima et de limites 74
IV. Maxima d'une fonction de deux variables indépendantes. 75

Questions proposées 76

CHAPITRE VI

Déterminants. — Équations linéaires. — Décomposition des formes quadratiques en carrés.

Questions traitées :

I-III. Différents exemples de calculs de déterminants 81
IV. Une décomposition en carrés 83
V. Dérivée d'un déterminant 85

Questions proposées 87

---

(1) Les fonctions hyperboliques ont été renvoyées au chapitre XIV.
(2) Voyez aussi chap. III, question IV.

CHAPITRE VII

Construction des courbes dont l'équation est résoluble par rapport à une des variables.

Questions traitées :

Construire les courbes représentées par les équations suivantes :

I. $y = L(x^2 - 3x + 2)$ . . . 96

II. $y = \dfrac{1}{x \pm \sqrt{1 - x^2}}$ 97

III. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 3x - 2}$ 98

IV. $y = x\,Lx$. 100

V. $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^3 + 9x - 9}$ 100

VI. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^3 + 3x + 2}{x^2 + 1}}$ . . . 102

VII. $y^5 + x^5 = 1$ 103

VIII. $y^4 - 2y^2 + x^4 - x^3 - x^2 + 1 = 0$. 104

IX. $y = \dfrac{1}{x} \pm \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}$ . . . 106

X. $y = x^2 \pm \sqrt[2]{x^{15}}$ 109

XI. $y = x \pm \sqrt[10]{x^7}$ 111

XII. $y = x \pm \sqrt{\dfrac{x^3 - 2x + 1}{x + 1}}$. . 112

XIII. $y = \pm\sqrt{x^2 - 3x + 2} \pm \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ 114

XIV-XVII. Exemples de recherches d'asymptotes. 116

XVIII. Remarques sur la construction de certaines courbes 118

XIX. Sur la courbe $Y = f(x) \cos 2\pi x$ 119

XX. Courbe analytique du visage de l'homme 119

Questions proposées 120

CHAPITRE VIII

Décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.

Questions traitées :

I-IV. Exemples divers de décomposition. 127

V. Problème des bourses de licence 1887. 130

Questions proposées. 131

CHAPITRE IX

Recherche des fonctions primitives et des intégrales indéfinies.

Questions traitées :

Calculer les intégrales :

I. $\int x(\text{arc tg } x)^2 dx$ 135

II. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2 + a^2} \log \frac{x^2 - a^2}{b^2} dx$. 135

III. $\displaystyle\int \frac{\text{tg}^3 x + \text{cotg}^3 x}{\text{tg}^3 x - \text{cotg}^3 x} dx$. 137

Questions proposées 137

CHAPITRE X

Calcul des intégrales définies.

Questions traitées :

I. Recherche d'une limite de somme 143

II. Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx$ 144

III. Un caractère de convergence des séries 144

Questions proposées 145

CHAPITRE XI

Développements en séries et en produits infinis.

Questions traitées :

I Démonstration d'une formule 152

II. Limite de θ dans la formule de Taylor, quand h tend vers zéro. 153

III. Démonstration de la formule des accroissements finis par les déterminants . 154

IV. Conditions de convergence d'un produit infini 155

V. Une série convergente dont les termes sont des fonctions continues peut ne pas être une fonction continue 156

VI. Note sur la formule de Mac-Laurin. 156

Questions proposées 156

CHAPITRE XII

Relations entre les coefficients et les racines d'une équation. — Transformation et abaissement des équations. — Fonctions symétriques. — Elimination.

Questions traitées :

I—X. Divers exercices sur l'abaissement et les fonctions symétriques 167

XI. Généralisation de la formule $\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{1}{x-l}$ 173

Questions proposées. 175

CHAPITRE XIII

Application des théorèmes de Descartes, de Rolle, de Budan et Fourier, de Sturm. — Recherche des racines commensurables et des racines égales.— Quelques équations que l'on sait résoudre.

Questions traitées :

I. Application du théorème de Rolle à l'équation $\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{1+x^2} = 0$ . . 183

II. Application du théorème de Sturm à l'équation $\frac{x^{11}-1}{x-1} = 0$. 184

III. Limite supérieure des racines positives d'une équation numérique . . . 185

IV.-V. Recherches de racines commensurables 186

VI. Quelques méthodes propres à résoudre les équations des troisième et quatrième degrés 188

VII. Le cas « irréductible » dans les équations du troisième degré 189
VIII. Note sur le théorème dit « de Rolle ». 191
IX. Démonstration par Segner du théorème de Descartes 194
X. Etude de la fonction $y = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Démonstration du théorème de Rolle. . 197
XI. Enoncés des théorèmes de Budan et de Fourier 199

Questions proposées 199

CHAPITRE XIV

Applications géométriques du calcul infinitésimal.

Questions traitées :

I. Aire du *folium* de Descartes et du *trèfle* de Marie 212
II. Calcul d'une intégrale indéfinie par l'emploi d'une courbe unicursale . . 216
III. Problèmes donnant lieu à un calcul d'intégrale double 218
IV. « Sur la déformation métallique des surfaces » 219
V. Evaluation d'un volume 219
VI Recherche d'un centre de gravité 221
VII. Quelques mots sur les fonctions hyperboliques 222
VIII. Tracé des chemins de fer russes par Lamé et Clapeyron. 223

Questions proposées :

I. Quadratures en coordonnées cartésiennes 228
II Cubatures 229
III. Centres de gravité 231
IV. Rectification des courbes, en coordonnées cartésiennes. 232
V. Quadratures en coordonnées polaires 232
VI. Rectification des courbes, en coordonnées polaires 233
VII. Rayons de courbure, développées, etc. 233
VIII. Complanation des surfaces 236
IX. Questions diverses 237
X. Fonctions hyperboliques 238

CHAPITRE XV

Fractions continues.

Questions traitées :

I. Développement de $\sqrt{a^2 - 1}$. 242
II. Développement d'une racine d'une éqnation du second degré 243
III. Résolution en nombres entiers d'une inégalité 243
IV. Résolution de l'équation $10^x = 3$. 244
V. Application des fractions continues à la théorie des horloges 244

Questions proposées 249

CHAPITRE XVI

Méthodes d'approximation — Théorie des différences. — Formules d'interpolation.

Questions traitées :

I. Application numérique de la formule d'interpolation de Lagrange. . . . 253
II. Une identité algébrique 253
III. « Nouvelles remarques sur le problème de l'interpolation » 255
IV. Méthode d'approximation de Lagrange 256

V. Calcul des racines d'une équation dont toutes les racines sont réelles par la méthode de M. C. Margerie 258

Questions proposées 259

CHAPITRE XVII

Calcul des Probabilités.

Questions traitées :

I. Problème sur le jeu de cinquante-deux cartes 267
II. Problème sur le jeu de trente-deux cartes 267
III. Loterie royale 268
IV. Jeu « des Sauvages » ou « des Noyaux » 270
V. Etranges erreurs amenées par l'emploi abusif du calcul des probabilités . 271

Questions proposées 274

ADDITIONS

Questions traitées :

I. La constante d'Euler 282
II. Sur certaines recherches de limites 283

Questions proposées 285

NOTA. — Le nombre des combinaisons de m lettres p à p a été représenté par $C_{m,p}$ ou par C_m^p. — L'expression de *conoïde parabolique* a été employée dans le sens ancien de surface engendrée par la rotation d'une parabole autour de son axe. — Le logarithme népérien d'un nombre x a été exprimé par la notation Lx ou lx.

Il faut supprimer, page 6, ligne 3 en remontant, les mots « ou pentagones ».— Page 144 question III, la fonction $\varphi(x)$ doit être supposée positive.

BAR-LE-DUC. — IMPRIMERIE COMTE-JACQUET.